

ORSAY

N° D'ORDRE : 5961

<p>UNIVERSITÉ de PARIS-SUD U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY</p>
--

Thèse

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

PAR

Mathieu Dutour

SUJET : **Bifurcation vers l'état d'Abrikosov et diagramme
de phase**

Soutenue le 10 décembre 1999 devant la commission d'examen

MM :	J. C. Saut	Président du Jury
	B. Helffer	Directeur de la thèse
	C. Bolley	Rapporteur de la thèse
	T. Rivière	Rapporteur de la thèse
	F. Bethuel	Examineur

Résumé

Nous étudions dans cette thèse la fonctionnelle de Ginzburg-Landau dans \mathbb{R}^3 sur des couples de fonctions (ϕ, \vec{A}) qui vérifient des conditions de périodicité de jauge en x_3 et selon un réseau discret de (x_1, x_2) . Nous montrons que le problème variationnel est équivalent au problème de la minimisation d'une autre fonctionnelle sur un tore. Dans le cadre de la démonstration, un fibré vectoriel non trivial apparaît. On se limite alors pour la suite à une quantification de 1. On montre ensuite que la fonctionnelle admet un minimum sur l'espace fonctionnel H^1 qui vérifie un système d'équations aux dérivées partielles appelé système de Ginzburg-Landau. Le minimum est C^∞ par l'ellipticité du système d'équations de Ginzburg-Landau. On montre qu'il y a une bifurcation du couple $(0, 0)$ pour le champ critique $H_{ext} = k$ où k est un paramètre caractéristique du système. On étudie alors la stabilité de la solution bifurquée. On étudie la dépendance de l'énergie minimale à l'égard de la géométrie du tore. Enfin nous décrivons toutes les solutions du système d'équations de Ginzburg-Landau dans la limite k tend vers l'infini. Dans le dernier chapitre, nous donnons pour notre modèle la structure du diagramme des phases en précisant quelles régions sont normales, supraconductrices pure, mixte.

REMERCIEMENTS

Je remercie chaleureusement Bernard Helffer pour avoir dirigé avec patience ma thèse pendant ces trois ans et m'avoir orienté dans mes recherches. Travailler avec lui fût pour moi un grand honneur et une occasion de profiter de ses très vastes connaissances.

Je remercie vivement Catherine Bolley et Tristan Rivière d'avoir eu la patience de lire ma thèse.

Je remercie également Jean Claude Saut et Fabrice Bethuel pour avoir accepté d'être parmi le jury de ma thèse.

Toute mon admiration va au très grand professeur Vladimir Arnold. Il a décidé de ma carrière.

Je remercie également les excellents professeurs que sont Yann Brenier et Bernard Randé.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Étude générale de la fonctionnelle	11
2.1	Définition de la fonctionnelle et invariance de jauge	11
2.2	Cadre fonctionnel pour E et réduction du problème à la dimension 2	15
2.3	Réduction à un problème sur le tore	21
2.4	Modélisation finale du problème traité	30
2.4.1	Hypothèse : Quantification choisie	32
2.4.2	Hypothèse 2 : choix de la géométrie du réseau	33
2.4.3	Changement de problème	34
2.5	Structure de l'espace des réseaux	39
2.5.1	Transformations induites sur les fonctions	41
2.5.2	Invariance de la fonctionnelle	43
2.5.3	Conséquences	44
3	Étude de la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$	47
3.1	Quelques opérateurs différentiels linéaires	47
3.1.1	L'opérateur de Schrödinger magnétique, H	48
3.1.2	L'opérateur L	52
3.2	Existence de solutions minimisantes pour la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$	56
3.3	Régularité des solutions	59
3.4	Propriétés du minimum de la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$	68
3.5	Formule de Bochner-Kodaira-Nakano	76
4	La bifurcation d'Abrikosov	80
4.1	Réduction de Lyapunov-Schmidt et bifurcation	80

4.2	Évaluation des énergies sur les différentes courbes de couples pour $H_{int} < k$	94
4.3	Stabilité du couple bifurqué	98
4.4	Analyse asymptotique des solutions de l'équation de Ginzburg-Landau	102
5	Analyse du minimum $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V$	109
5.1	Théorèmes de monotonie	109
5.2	Analyse du cas $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (d'après [Sa])	113
5.2.1	L'équation de Kazdan-Warner (d'après [Sa])	113
5.2.2	Résolution de $A_+ = 0$ et conséquences	120
5.3	Le diagramme des phases, l'état normal	132
5.4	Diagramme de phase, l'état supraconducteur pur	141
5.5	Conclusion et références	146

Chapitre 1

Introduction

L'étude des supraconducteurs peut se faire de façon thermodynamique (voir par exemple [Ki], p. 368) en minimisant une énergie libre.

Landau et Ginzburg, dans un article célèbre, ont introduit une fonctionnelle $E(\phi, \vec{A})$ comme expression possible pour l'énergie libre des supraconducteurs où ϕ est une fonction d'onde et \vec{A} est un potentiel magnétique.

Dans cette thèse, on envisage une modélisation particulière du problème dont l'idée appartient à Abrikosov (voir l'article [Ab]) qui cherchait à montrer l'apparition d'un état mixte entre la solution supraconductrice pure où $\phi = 1$ et le champ magnétique est nul à l'intérieur du supraconducteur et la solution normale où $\phi = 0$ et le champ magnétique interne est égal au champ extérieur qui est constant.

Le paramètre k est le paramètre de Ginzburg Landau. Il est sans dimension et strictement positif. On définit pour tout ouvert \mathcal{X} relativement compact de \mathbb{R}^3 une fonctionnelle par

$$\begin{aligned} H_{loc}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \times H_{loc}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) &\mapsto \mathbb{R} \\ (\phi, \vec{A}) &\mapsto E_{\mathcal{X}}(\phi, \vec{A}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}} \|\operatorname{rot} \vec{A} - \vec{H}_{ext}\|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\mathcal{X}} (1 - |\phi|^2)^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}} \|ik^{-1} \vec{\nabla} \phi + \vec{A} \phi\|^2 dx. \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

L'ouvert \mathcal{X} correspond au domaine occupé par le matériau et sera choisi plus loin.

Le champ magnétique \vec{H}_{ext} est le champ extérieur que l'on applique sur le supraconducteur. On le suppose constant et dirigé suivant la direction x_3 .

On écrira les changements de jauge de la même façon que dans le livre [Na]

c'est à dire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \rightarrow \phi e^{ikf} \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f \end{array} \right. \text{ avec } f \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) . \quad (1.0.2)$$

La fonctionnelle $E_{\mathcal{X}}$ est invariante par ces changements de jauge, c'est à dire que l'on a :

$$E_{\mathcal{X}}(\phi e^{ikf}, \vec{A} + \vec{\nabla} f) = E_{\mathcal{X}}(\phi, \vec{A}) \text{ avec } f \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}). \quad (1.0.3)$$

On considère dans cette thèse des états (ϕ, \vec{A}) dont les translations selon la direction x_3 qui est celle du champ magnétique sont équivalentes de jauge à l'état original. On suppose aussi que les translatés selon un réseau discret sont équivalents à l'état original.

On associe à l'état (ϕ, \vec{A}) le champ magnétique \vec{B} , la densité d'électrons supraconducteurs n et le courant d'électrons \vec{J} sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \\ n = |\phi|^2, \\ \vec{J} = \text{Re}[\bar{\phi}(ik^{-1}\vec{\nabla}\phi + \vec{A}\phi)] \end{array} \right. \quad (1.0.4)$$

et qui sont les quantités physiques intéressantes. Elles sont en effet invariantes de jauge donc en particulier périodiques selon un réseau \mathcal{L} fixé et constantes selon la direction x_3 .

Dans la section 2.2, on montre que le minimum de la fonctionnelle peut être pris sur les états (ϕ, \vec{A}) constants selon x_3 et périodiques de jauge selon le réseau \mathcal{L} .

Dans la section 2.3, on démontre que le problème peut se réduire à l'étude d'un problème défini sur l'espace quotient \mathbb{R}^2/\mathcal{L} . Mais cette réduction est plus complexe et le résultat est que la fonction ϕ appartient à un fibré vectoriel non trivial sur le tore. Le problème est alors scindé en une infinité dénombrable de problèmes de minimisation sur un espace vectoriel \mathcal{B}_d . Notre démonstration rigoureuse semble être originale, voir cependant [BGT] et [DGP] pour des démonstration partielles.

Ci-dessous on indique ce qui sera démontré.

Théorème 1.0.1 . *Il existe une suite de fibrés en droites complexes E_d indexée par $d \in \mathbb{Z}$ définis sur le tore \mathbb{R}^2/\mathcal{L} , avec une fonctionnelle associée $E^{int,d}$ sur l'espace $H^1(E_d) \oplus H_{div,0}^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2)$ tel que, pour chaque état (ϕ, \vec{A}) périodique de jauge selon le réseau \mathcal{L} et périodique de jauge selon*

la direction x_3 , il existe un entier $d \in \mathbb{Z}$ et un état de la forme (ϕ', \vec{A}') avec $\phi' \in H^1(E_d)$ et $\vec{A}' \in H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ de divergence nulle sur \mathbb{R}^2/\mathcal{L} tel que $E^{int,d}(\phi', \vec{A}') \leq E_{\mathcal{X}}(\phi, \vec{A})$.

De plus si $d \neq 0$ alors on peut imposer que \vec{A}' est d'intégrale nulle sur \mathbb{R}^2/\mathcal{L} . En particulier l'étude des minima de la fonctionnelle se ramène de ce fait à l'étude des minima de la famille de fonctionnelles réduites $(E^{int,d})_{d \in \mathbb{Z}}$.

L'entier d définit une quantification de notre problème. Dans la section 2.4 on fait l'hypothèse d'une quantification égale à 1. On fait alors apparaître une nouvelle fonctionnelle $E_{k,H_{ext}}^V$.

Un premier problème variationnel appelé “problème réduit” est obtenu en éliminant une des variables (le flux magnétique) ; il consiste en la minimisation de la fonctionnelle

$$F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |i \vec{\nabla} \phi + (\vec{A}_0 + \vec{a}) \phi|^2 + \frac{1}{4} (\lambda - |\phi|^2)^2 + \frac{k^2}{2} |\text{rot } \vec{a}|^2 \quad (1.0.5)$$

sur l'espace fonctionnel

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{l} (\phi, \vec{a}) \in H^1(E_1) \times H^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2) \\ \text{avec } \phi(z + v_i) = e^{i\pi \det(v_i, x)} \phi(z), \\ \vec{a} \text{ } \mathcal{L}\text{-périodique, } \text{div } \vec{a} = 0 \text{ et } \int_{\Omega} \vec{a} = 0. \end{array} \right\}, \quad (1.0.6)$$

où les v_i engendrent un réseau de \mathbb{R}^2 et Ω est un domaine fondamental pour ce réseau. Le minimum est appelé $m_F(\lambda, k)$.

On est ensuite amené à étudier le minimum sur \mathbb{R}_+^* de

$$G_{k,H_{ext}}^V : H_{int} \mapsto \left(\frac{H_{int}}{2\pi k} \right)^2 m_F\left(\frac{2\pi k}{H_{int}}, k \right) + \frac{1}{2} (H_{int} - H_{ext})^2, \quad (1.0.7)$$

où H_{int} est la variable éliminée précédemment. Le minimum est appelé $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V$. La fonctionnelle $E_{k,H_{ext}}^V$ s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{k,H_{ext}}^V : \mathbb{R} \times \mathcal{A} &\mapsto \mathbb{R} \\ (H_{int}, \phi, \vec{a}) &\mapsto \frac{F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a})}{\lambda^2} + \frac{1}{2} (H_{int} - H_{ext})^2 \end{aligned} \quad (1.0.8)$$

avec $\lambda = \frac{2\pi k}{H_{int}}$.

Dans cette opération apparaît un champ intérieur H_{int} qui est en fait la moyenne du champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur (ou flux).

On appelle “couple” tout élément de la forme (ϕ, \vec{a}) . On appelle “état” tout

triplet (H_{int}, ϕ, \vec{a}) . On n'exige pas que ces états et couples soient solutions des équations de Ginzburg-Landau. Les triplets (H_{int}, ϕ, \vec{a}) correspondent à des couples (ϕ, \vec{A}) qui sont donc également appelés des états.

On dit que l'état du supraconducteur est pur si le minimum $\mathcal{E}_{k, H_{ext}}^V$ est égal à $\frac{H_{ext}^2}{2}$, cette énergie est atteinte par un état de quantification 0 ; on dit que l'état du supraconducteur est normal si le minimum est atteint par l'état $(H_{ext}, 0, 0)$. On dit qu'il est dans un état mixte dans les autres cas.

Dans la section 2.5 on étudie les symétries de l'espace des réseaux d'une façon géométrique et on montre ainsi l'annulation de certaines dérivées. Cette étude est réminiscente de celle des courbes elliptiques faite dans [Sie], volume III, chapitre 6, section 5, bien que notre groupe de symétries soit plus grand que le groupe modulaire.

Le matériel du Chapitre 3 est le plus souvent classique. Il s'agit de l'étude variationnelle du minimum de la fonctionnelle $F_{\lambda, k}$.

La section 3.1 étudie deux opérateurs différentiels linéaires classiques : le laplacien magnétique en champ constant et le laplacien simple, tous deux opérant sur des espaces de sections de fibrés vectoriels C^∞ de base \mathbb{R}^2/\mathcal{L} . Cette étude n'est pas originale, voir par exemple [BGT].

Définition 1.0.2 . *On dit qu'une fonctionnelle E est coercive pour N où N est une norme sur l'espace de définition de la fonctionnelle si, pour tout réel C , il existe un réel $C' > 0$, tel que $E(f) < C$ implique $N(f) < C'$.*

On montre dans la section 3.2 que la fonctionnelle réduite $F_{\lambda, k}$ est coercive sur l'espace fonctionnel $H^1(E_1) \oplus H^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2)$, ce qui n'était pas le cas pour le problème initial. On peut alors prouver que la fonctionnelle réduite atteint son minimum.

On montre dans la section 3.3 que les couples réalisant le minimum en quantification 1 vérifient le système d'équations aux dérivées partielles de Ginzburg-Landau et que ces couples sont C^∞ en vertu de l'ellipticité de ce même système. On obtient en particulier le théorème suivant (voir par exemple [DGP]).

Théorème 1.0.3 . *Le problème variationnel réduit sur $H^1(E_1) \oplus H^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2)$ est coercif, et le minimum de la fonctionnelle réduite $F_{\lambda, k}$ est atteint en au moins un point. Les solutions minimisantes sont C^∞ .*

Dans la section 3.4, on montre que la fonction d'onde ϕ est bornée par 1 par un principe du maximum. On montre ensuite que la fonctionnelle complète

$$\begin{aligned} E_{k,H_{ext}}^V : \mathbb{R} \times \mathcal{A} &\mapsto \mathbb{R} \\ (H_{int}, \phi, \vec{a}) &\mapsto E_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi, \vec{a}) \end{aligned} \quad (1.0.9)$$

atteint son minimum sur un état (H_{int}, ϕ, \vec{a}) .

On montre ensuite que le champ magnétique à l'intérieur d'un supraconducteur est inférieur au champ extérieur.

Dans la section 3.5 on montre une formule de Bochner-Kodaira-Nakano et on l'utilise pour élucider le cas particulier $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lambda \leq 2\pi$. C'est la clé pour l'étude précise du diagramme de phase de la fonctionnelle entreprise dans le chapitre 5.

Le chapitre 4 est consacré à la bifurcation d'Abrikosov.

On constate expérimentalement le fait suivant : Si on place un supraconducteur dans un champ magnétique alors ce champ disparaît à l'intérieur du supraconducteur (cas des supraconducteurs de type I avec $k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$) ou s'affaiblit (cas des supraconducteurs de type II avec $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$). Cette propriété est appelé écrantage du champ magnétique. Dans notre modélisation, on considère le champ magnétique interne H_{int} comme un paramètre.

La bifurcation d'Abrikosov consiste à effectuer des calculs au voisinage de l'état normal pour montrer l'existence de solutions des équations de Ginzburg-Landau.

Dans la section 4.1, on fait varier le paramètre H_{int} et on montre qu'il y a une bifurcation des solutions (du problème réduit pour le champ $H_{int} = k$) du couple $(0,0)$ vers un couple non trivial. Cette section est inspirée des travaux [Od1], [Od2] et [BGT], mais notre analyse est plus précise.

Cette bifurcation existe si $k \neq \sqrt{\frac{2K}{I}}$. Dans la section 4.2, on effectue des calculs explicites sur l'énergie du couple bifurqué. On constate que l'état bifurqué est d'énergie plus faible que l'état normal si et seulement si la condition $k > \sqrt{\frac{2K}{I}}$ est vérifiée.

Enfin dans la section 4.3, on discute la stabilité du couple bifurqué. On montre que l'état bifurqué est stable si $k > \sqrt{\frac{2K}{I}}$ et instable si $k < \sqrt{\frac{2K}{I}}$. Dans la section 4.4, on décrit pour des k assez grands le comportement de la fonctionnelle près de la bifurcation :

Théorème 1.0.4 . *Il existe $\gamma > 0$ et $k_0 > 0$ tel que si $k > k_0$ et $H_{int} > k - \gamma$*

alors les points critiques de la fonctionnelle réduite sont les solutions déjà calculées dans la section 4.1, c'est à dire les solutions bifurquées et la solution triviale. On montre également que la solution triviale est un point col pour la fonctionnelle et que la solution bifurquée est un minimum global.

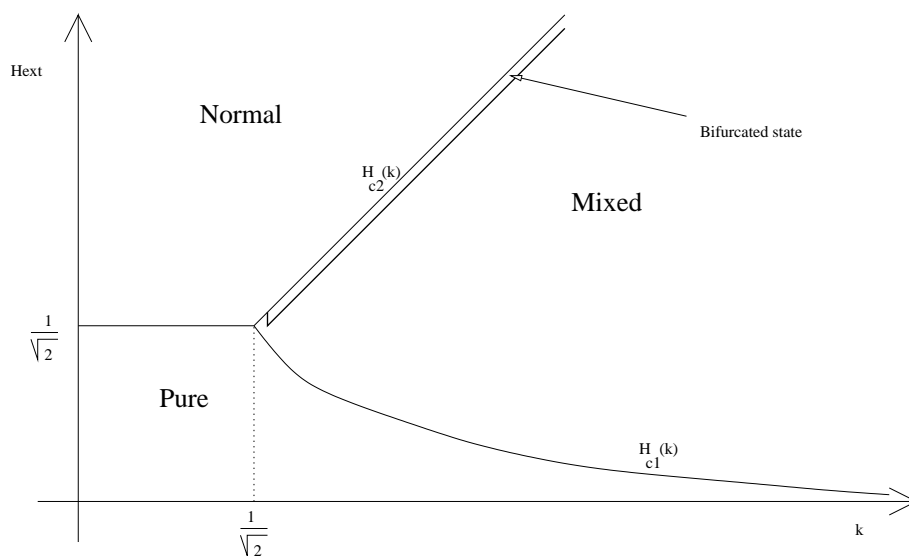
Le chapitre 5 étudie le diagramme des phases (k, H_{ext}) du supraconducteur. Dans la section 5.1, on montre des théorèmes de monotonie. Si, en (k, H_{ext}) , le supraconducteur est pur, alors il est aussi pur en (k', H'_{ext}) si $k' \leq k$ et $H'_{ext} \leq H_{ext}$ (cf 5.1.1). On a des théorèmes similaires pour l'état normal (cf 5.1.3 et 5.1.4). On obtient du même coup le diagramme si $k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (cf 5.1.7).

La section 5.2 est consacrée à une étude approfondie du cas $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La sous-section 5.2.1 redémontre des résultats de Dietmar Salamon non publiés. Puis on détermine les couples minimisants $F_{\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}}}$ (cf 5.2.7); on démontre la relation remarquable $I - 4K = 1$ (cf 5.2.12) et on montre que la condition $k > \sqrt{\frac{2K}{I}}$ est vérifiée dans la zone $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (cf 5.2.13).

La description complète de l'état normal est effectuée dans la section 5.3. Elle commence par un lemme très important de localisation (cf 5.3.1) et se poursuit sur le théorème de bifurcation d'Abrikosov (cf 5.3.4), où l'on donne une description précise du minimum et des états minimisants autour de $H_{ext} = k$. On peut alors calculer explicitement le champ critique $H_{c2}(k)$ de notre modèle.

La section 5.4 décrit l'état pur. Le théorème 5.4.1 montre l'existence du champ critique $H_{c1}(k)$. On trouve ensuite une expression en inf pour $H_{c1}(k)$ (cf 5.4.3), une estimée asymptotique (cf 5.4.4) et la continuité de H_{c1} (cf 5.4.6). On a alors une description presque complète des régions du plan (k, H_{ext}) où l'état du supraconducteur est pur.

On a alors démontré que le diagramme de phase a pour allure (cf le théorème 5.1.7 pour $k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, le théorème 5.3.5 pour l'état normal, le théorème 5.4.6 pour la décroissance de la région où l'état est pur et le théorème 5.3.4 pour la bifurcation d'Abrikosov) :



où

- P désigne la région où le minimum de la fonctionnelle est atteint par l'état pur,
- N désigne la région où le minimum de la fonctionnelle est atteint par l'état normal,
- M désigne la région où le minimum de la fonctionnelle est atteint par l'état mixte.

Chapitre 2

Étude générale de la fonctionnelle

2.1 Définition de la fonctionnelle et invariance de jauge

On note $\mathcal{E}(\phi, \vec{A})$ l'intégrande de la fonctionnelle $E(\phi, \vec{A})$ définie en (1.0.1). C'est la fonction définie sur \mathbb{R}^3 par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\phi, \vec{A}) &: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2} \|\vec{\text{rot}} \vec{A}(x) - \vec{H}_{ext}\|^2 + \frac{1}{4} (1 - |\phi(x)|^2)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|ik^{-1} \vec{\nabla} \phi(x) + \vec{A}(x) \phi(x)\|^2. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

On a alors pour tout ouvert \mathcal{X} de \mathbb{R}^3 la relation

$$E_{\mathcal{X}}(\phi, \vec{A}) = \int_{\mathcal{X}} \mathcal{E}(\phi, \vec{A}) dx \quad (2.1.2)$$

qui montre bien que \mathcal{E} est une densité d'énergie locale.

On verra plus loin que, si $\phi \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ et $\vec{A} \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, alors $\mathcal{E}(\phi, \vec{A}) \in L_{loc}^1$.

Hypothèse 2.1.1 . On supposera toujours que le champ extérieur \vec{H}_{ext} est constant.

On prend les coordonnées x_1, x_2, x_3 orthonormées de façon que $\vec{H}_{ext} = (0, 0, H_{ext})$.

On note \mathcal{L} le réseau de \mathbb{R}^2 défini par les deux vecteurs suivants

$$\begin{cases} v_1 = (\xi_1, \eta_1), \\ v_2 = (\xi_2, \eta_2). \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Nous plongerons ce réseau dans \mathbb{R}^3 en posant que la composante selon x_3 est nulle.

Remarque 2.1.2 . Dans cette thèse nous aurons besoin de produits hermitiens. Par convention nous noterons

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \bar{\phi} \psi \quad (2.1.4)$$

Il y a donc antilinéarité par rapport à la première variable.

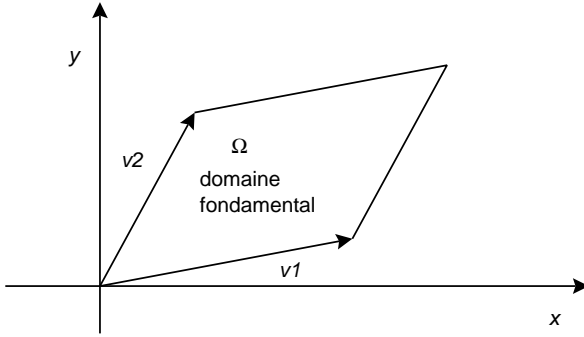
Définition 2.1.3 . Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine fondamental pour le réseau \mathcal{L} si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \cup_{l \in \mathcal{L}} (E + l), \\ \text{si } l \neq l' \text{ alors } \{E + l\} \cap \{E + l'\} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

On appelle Ω le domaine fondamental de \mathbb{R}^2 associé à \mathcal{L} défini par

$$\Omega = \{w = t_1 v_1 + t_2 v_2 \text{ tel que } t_1 \in [0, 1[\text{ et } t_2 \in [0, 1[\} \quad (2.1.6)$$

que l'on dessine ci-dessous dans le plan (x, y)



L'aire du domaine est

$$|\Omega| = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1. \quad (2.1.7)$$

L'invariance selon x_3 du système signifie que le système translaté est équivalent de jauge avec le système initial ; on dira que (ϕ, \vec{A}) est « invariant de jauge selon x_3 » si

$$\begin{cases} \forall l \in \mathbb{R}, \exists f_l \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \\ \phi(., x_3 + l) = e^{ik f_l(., x_3)} \phi(., x_3) \\ \vec{A}(., x_3 + l) = \vec{A}(., x_3) + \vec{\nabla} f_l(., x_3) \end{cases} \quad (2.1.8)$$

et on dira que (ϕ, \vec{A}) est « périodique de jauge selon le réseau \mathcal{L} » si

$$\begin{cases} \forall t \in \mathcal{L}, \exists g^t \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}^3 \\ \phi(x+t) = e^{ikg^t(x)}\phi(x) \\ \vec{A}(x+t) = \vec{A}(x) + \vec{\nabla} g^t(x). \end{cases} \quad (2.1.9)$$

Les fonctions f_l et g^t des équations (2.1.8) et (2.1.9) sont définies à une constante près par le couple (ϕ, \vec{A}) .

On note \mathcal{D} l'espace des couples vérifiant ces conditions :

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} (\phi, \vec{A}) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \times H_{loc}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \\ \text{tel que (2.1.8) et (2.1.9) sont vérifiés.} \end{array} \right\} \quad (2.1.10)$$

La fonction $x \mapsto \mathcal{E}(\phi, \vec{A})(x)$ ne dépend que de x_1, x_2 et est périodique suivant le réseau \mathcal{L} à cause de son invariance de jauge. Donc l'intégrale (1.0.1) diverge si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^3$. Le choix de \mathcal{X} suivant répond à notre problème

$$\mathcal{X} = \Omega \times]a, b[\text{ avec }]a, b[\text{ borné.} \quad (2.1.11)$$

Le domaine d'intégration \mathcal{X} est relativement compact et la densité d'énergie $\mathcal{E}(\phi, \vec{A})$ est localement intégrable donc l'intégrale (1.0.1) est finie, si $(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{D}$. Il est naturel de diviser par $b - a$ pour obtenir une fonctionnelle qui ne dépendent ni de a ni de b . On cherche des énergies volumiques, on divise donc par $|\Omega|$. On appelle cette énergie E_n^3

$$E_n^3(\phi, \vec{A}) = \frac{1}{(b-a)|\Omega|} \int_a^b \int_{\Omega} \mathcal{E}(\phi, \vec{A})(x_1, x_2, l) dS dl. \quad (2.1.12)$$

Cette intégrale ne dépend pas des valeurs précises de a, b et du domaine fondamental sur lequel on intègre parce que le système est périodique de jauge. et que $\mathcal{E}(\phi, \vec{A})$ est invariant de jauge.

Le problème qui nous occupera dans cette thèse est le suivant :

Problème 2.1.4 . *Trouver*

$$\min_{(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{D}} E_n^3(\phi, \vec{A}) \quad (2.1.13)$$

et décrire les états (H_{int}, ϕ, \vec{A}) qui réalisent ce minimum.

La proposition qui suit précise le lien entre énergie volumique et notre fonctionnelle. Elle ne nous servira pas par la suite.

Proposition 2.1.5 . Soit $(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{D}$. On a l'égalité suivante

$$E_n^3(\phi, \vec{A}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} \mathcal{E}(\phi, \vec{A})(x) dx \quad (2.1.14)$$

où $B(0, R) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, |x_i| \leq R\}$.

Preuve. On pose

$$\mathcal{I} = \Omega \times [0, 1[\quad (2.1.15)$$

On définit un réseau

$$\mathcal{R} = \mathcal{L} \times \mathbb{Z}. \quad (2.1.16)$$

L'ensemble \mathcal{I} est un domaine fondamental pour le réseau \mathcal{R} de \mathbb{R}^3 .

Vu les propriétés d'invariance de jauge (2.1.8) et (2.1.9) et la propriété (1.0.3), on a

$$\forall t \in \mathcal{R}, \int_{\mathcal{I}+t} \mathcal{E}(\phi, \vec{A})(x) dx = \int_{\mathcal{I}} \mathcal{E}(\phi, \vec{A})(x) dx. \quad (2.1.17)$$

On pose

$$\begin{aligned} g(R) &= \{t \in \mathcal{R}, \text{ tel que } \mathcal{I} + t \subset B(0, R)\}, \\ G(R) &= \{t \in \mathcal{R}, \text{ tel que } \mathcal{I} + t \cap B(0, R) \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

et

$$\begin{aligned} m(R) &= \cup_{t \in g(R)} \{\mathcal{I} + t\} \\ M(R) &= \cup_{t \in G(R)} \{\mathcal{I} + t\}. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Les définitions (2.1.18) et (2.1.19) correspondent à l'idée que l'on encadre l'ensemble $B(0, R)$ par deux ensembles sur lesquels on pourra calculer l'intégrale.

Puisque $m(R) \subset B(0, R) \subset M(R)$, on a l'inégalité

$$\int_{m(R)} \mathcal{E}(\phi, \vec{A})(x) dx \leq \int_{B(0, R)} \mathcal{E}(\phi, \vec{A})(x) dx \leq \int_{M(R)} \mathcal{E}(\phi, \vec{A})(x) dx. \quad (2.1.20)$$

On pose

$$\begin{aligned} n(R) &= \text{card } g(R), \\ N(R) &= \text{card } G(R). \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Par la relation (2.1.20), on a l'inégalité

$$n(R)|\Omega|E_n^3(\phi, \vec{A}) \leq \int_{B(0, R)} \mathcal{E}(\phi, \vec{A})(x) dx \leq N(R)|\Omega|E_n^3(\phi, \vec{A}). \quad (2.1.22)$$

On montre par des arguments géométriques que

$$n(R) \sim N(R) \sim \frac{|B(0, R)|}{|\Omega|}, \quad (2.1.23)$$

ce qui signifie que le quotient des différentes quantités tend vers 1 quand R tend vers ∞ .

On obtient alors grâce à (2.1.23) et (2.1.22)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} \mathcal{E}(\phi, \vec{A})(x) dx = E_n^3(\phi, \vec{A}). \quad (2.1.24)$$

On a bien l'approximation annoncée.

CQFD

2.2 Cadre fonctionnel pour E et réduction du problème à la dimension 2

On se propose dans cette section de ramener le problème de la minimisation de la fonctionnelle E_n^3 à un problème bidimensionnel.

Rappelons tout d'abord quelques propriétés classiques des espaces de Sobolev que nous utiliserons.

Définition 2.2.1 . Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $m \in \mathbb{Z}$; on dit qu'une distribution f sur \mathbb{R}^n appartient à $W_m^p(\mathbb{R}^n)$ si

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leq m. \quad (2.2.1)$$

Si O est un ouvert, on définit de la même manière les espaces $W_m^p(O)$ (respectivement $W_{m,loc}^p(\mathbb{R}^n)$) en exigeant que les dérivées jusqu'à l'ordre m appartiennent à $L^p(O)$ (respectivement $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$).

Dans la définition, les dérivées sont prises au sens des distributions.

Définition 2.2.2 . (Espaces de Sobolev) On note $H_{loc}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = W_{m,loc}^2(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.2.3 . (Inclusions de Sobolev) Pour p tel que $1 < p < +\infty$, on a, avec $q = \frac{np}{n-p}$, les inclusions suivantes

- (a) Si $n > p$ alors $W_{1,loc}^p(\mathbb{R}^n) \subset L_{loc}^q(\mathbb{R}^n)$.
- (b) Si $n = p$ alors $\forall r$ tel que $n < r < +\infty$ on a $W_{1,loc}^p(\mathbb{R}^n) \subset L_{loc}^r(\mathbb{R}^n)$.
- (c) Si $n < p$ alors $W_{1,loc}^p(\mathbb{R}^n) \subset C^0(\mathbb{R}^n)$.

De plus si $1 < r < q$ et si O est un ouvert relativement compact de \mathbb{R}^n , alors $W_1^p(O) \subset L^r(O)$ et l'injection est compacte.

Preuve. Voir le traité d'Adams [Ad] sur les espaces de Sobolev.

Théorème 2.2.4 . Si $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors il existe $g \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta g = f$.

Preuve. La fonction f peut être vue comme une distribution sur \mathbb{R}^n . Le corollaire 10.7.10 du tome II de [Ho] indique que l'on peut résoudre cette équation dans \mathcal{D}' si \mathbb{R}^n est Δ -convexe pour les supports et les supports singuliers, ce qui est vrai par les théorèmes 10.7.2 et 10.6.2 du traité [Ho]. On a alors une distribution g telle que $\Delta g = f$. L'ellipticité de Δ implique alors que $g \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. **CQFD**

Théorème 2.2.5 . La fonctionnelle (2.1.12) est bien définie si $(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{D}$.

Preuve. Le théorème 2.2.3 donne l'estimée

$$(\phi, \vec{A}) \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C} \times \mathbb{R}^3) \text{ si } p \leq 6. \quad (2.2.2)$$

Nous allons montrer que les différents termes de l'intégrande (2.1.1) sont localement intégrables. On développe l'intégrande ci-dessous

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}(\phi, \vec{A}) = & k^{-2} |i\vec{\nabla}\phi|^2 + 2k^{-1} \operatorname{Re}[\vec{A}\bar{\phi} \cdot i\vec{\nabla}\phi] + \vec{A}^2 |\phi|^2 \\ & + \frac{1}{2} (1 - |\phi|^2)^2 + \|\operatorname{rot} \vec{A} - \vec{H}_{ext}\|^2. \end{aligned}$$

On veut montrer que \mathcal{E} appartient à L^1_{loc} ; pour cela il faut montrer que les intégrales $\int_O |\mathcal{E}| dx$ sont finies quand on parcourt l'ensemble des ouverts relativement compacts de \mathbb{R}^3 . On évalue chaque terme en utilisant l'inégalité de Hölder et le théorème 2.2.5.

Soit donc O un ouvert relativement compact de \mathbb{R}^3 ; il existe une constante C tel que $\forall (\phi, \vec{A}) \in \mathcal{D}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_O \vec{A}^2 |\phi|^2 dx & \leq \|\phi\|_{L^4(O)}^2 \|\vec{A}\|_{L^4(O)}^2 \\ \int_O |\vec{A}\bar{\phi} \cdot \vec{\nabla}\phi| dx & \leq \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^2(O)} \|\vec{A}\|_{L^4(O)} \|\phi\|_{L^4(O)} \\ \int_O \|\vec{\nabla}\phi\|^2 dx & = \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^2(O)}^2 \\ \int_O (1 - |\phi|^2)^2 dx & = \operatorname{vol}(O) + \|\phi\|_{L^4(O)}^4 - 2\|\phi\|_{L^2(O)}^2 \\ \int_O \|\operatorname{rot} \vec{A} - \vec{H}_{ext}\|^2 dx & \leq C(\|\vec{A}\|_{H^1(O)}^2 + \|\vec{H}_{ext}\|_{L^2(O)}^2). \end{array} \right. \quad (2.2.3)$$

La constante C qui apparaît à la dernière ligne de l'équation précédente est celle qui permet de contrôler la norme $L^2(O)$ de $\operatorname{rot} \vec{A}$ par la norme $H^1(O)$ de \vec{A} .

Tous les termes de \mathcal{E} sont dans L^1_{loc} donc E_n^3 est bien défini puisque l'intégrale (2.1.12) porte sur un ouvert relativement compact de \mathbb{R}^3 . **CQFD**

Définition 2.2.6 . L'ensemble des couples (ϕ, \vec{A}) de \mathcal{D} indépendant de x_3 et vérifiant $A_3 = 0$ est appelé \mathcal{D}_{spec} .

Théorème 2.2.7 . Soit $(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{D}$ alors il existe $(\phi', \vec{A}') \in \mathcal{D}_{spec}$ vérifiant $\mathcal{E}(\phi', \vec{A}') \leq \mathcal{E}(\phi, \vec{A})$.

Preuve.

1^{ère} étape :

Soit $(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{D}$; la translation selon x_3 fait opérer un changement de jauge sur le système

$$\forall l \in \mathbb{R}, \text{ il existe } f_l \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \text{ tel que,} \quad (2.2.4)$$

$$\vec{A}(., x_3 + l) = \vec{A}(., x_3) + \vec{\nabla} f_l(., x_3).$$

Cela signifie que le champ magnétique $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ est indépendant de x_3 . Par ailleurs le champ \vec{B} appartient à $(L_{loc}^2(\mathbb{R}^3))^3$; donc $\vec{B}(x_1, x_2, x_3) = \vec{B}(x_1, x_2)$ et $\vec{B} \in (L_{loc}^2(\mathbb{R}^2))^3$.

On cherche maintenant un potentiel vecteur \vec{A}' qui ne dépende pas de x_3 et tel que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}'$. Pour cela on résout l'équation $B_3 = \Delta f$, dans $H_{loc}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ce qui est possible (cf 2.2.4). On a résolu en partie notre problème puisqu'on a la relation

$$\text{rot} \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \end{pmatrix}. \quad (2.2.5)$$

Puis on cherche une fonction A'_3 définie sur \mathbb{R}^2 telle que

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A'_3}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial A'_3}{\partial x_1} \end{pmatrix}. \quad (2.2.6)$$

L'équation (2.2.6) est soluble dans $H_{loc}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ parce que $\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} = 0$.

Le potentiel suivant

$$\vec{A}'(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ A'_3(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

vérifie l'équation $\text{rot}(\vec{A} - \vec{A}') = 0$.

La différence $\vec{A} - \vec{A}'$ appartient à $H_{loc}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Donc $\exists g \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tel

que $\vec{A} - \vec{A}' = \vec{\nabla} g$. Pour une démonstration de ce résultat, voir [Chab], p. 101-103 et le théorème 2.2.4.

On utilise alors la fonction g pour faire un changement de jauge sur le couple (ϕ, \vec{A})

$$\begin{cases} \phi & \rightarrow \phi e^{-ikg} \\ \vec{A} & \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla} g. \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Grâce à cette transformation, le potentiel vecteur devient indépendant de x_3 . Cela signifie par l'invariance de jauge selon x_3 que pour tout $l \in \mathbb{R}$, il existe un complexe de module 1, $g(l)$ tel que

$$\phi(., x_3 + l) = \phi(., x_3)g(l). \quad (2.2.9)$$

On souhaite montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ vérifiant $|c| = 1$ tel que $\forall l, g(l) = c^l$. Si $\phi = 0$ presque partout alors il suffit de prendre $c = 1$ pour résoudre le problème.

Si $\phi(x_1, x_2, x_3) \neq 0$ alors $\forall l \in \mathbb{R}, \phi(x_1, x_2, l) \neq 0$ grâce à l'équation (2.2.9).

Si $\text{mes}\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \phi(x_1, x_2, x_3) \neq 0\} > 0$ alors il existe un compact K de mesure positive inclus dans l'ensemble précédent [MaAi], p. 73. La fonction

$$g(l) = \int_{K \times [0,1]} \frac{\phi(x_1, x_2, x_3 + l)}{\phi(x_1, x_2, x_3)} dx \quad (2.2.10)$$

est alors mesurable comme intégrale à paramètre de fonctions mesurables (cf [MaAi], p. 39).

On vérifie alors que $g(l + l') = g(l)g(l')$ par un calcul simple et en utilisant l'unicité de la fonction g .

On utilise alors le lemme suivant (cf [RV]) dont nous donnons ici une démonstration courte utilisant la théorie des distributions.

Lemme 2.2.8 . Soit f un morphisme du groupe \mathbb{R} dans le groupe S^1 . On suppose qu'il est mesurable comme fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} alors

$$\exists a \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(t) = e^{iat}. \quad (2.2.11)$$

Preuve. La fonction f est bornée et mesurable sur \mathbb{R} ; donc elle peut être considérée comme une distribution tempérée. On note \hat{f} sa transformée de Fourier. L'équation fonctionnelle pour la fonction f implique alors, après changement de variable :

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int f(l) e^{-ikl} dl = \int f(l + l') e^{-ikl - ikl'} dl \\ &= e^{-ikl'} f(l') \int f(l) e^{-ikl} dl = e^{-ikl'} f(l') \hat{f}(k), \forall l' \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Cela s'écrit :

$$\forall l' \in \mathbb{R}, [1 - e^{-ikl'} f(l')] \hat{f}(k) = 0. \quad (2.2.13)$$

La distribution \hat{f} est non nulle puisque la transformée de Fourier est injective. Cela implique qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall l' \in \mathbb{R}, 1 - e^{-ial'} f(l') = 0. \quad (2.2.14)$$

La dernière équation est équivalente à $f(l) = e^{ial}$. **CQFD**

Par le lemme 2.2.8, la fonction g est de la forme $g(l) = e^{ial}$ avec $a \in \mathbb{R}$; on fait le changement de jauge suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \rightarrow \phi e^{-iax_3} \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{k} \end{pmatrix} \end{array} \right. . \quad (2.2.15)$$

La fonction ϕ devient indépendante de x_3 et le potentiel vecteur reste indépendant de x_3 .

Jusqu'à présent les opérations effectuées sur (ϕ, \vec{A}) ont été des changements de jauge; elles n'ont donc pas changé $E_n^3(\phi, \vec{A})$. L'étape suivante ne suit pas ce schéma.

2^{eme} étape :

On peut désormais supposer que ϕ et \vec{A} sont indépendants de x_3 . On a alors

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1(x_1, x_2) \\ A_2(x_1, x_2) \\ A_3(x_1, x_2) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (2.2.16)$$

On pose :

$$\vec{A}^{plan} = \begin{pmatrix} A_1(x_1, x_2) \\ A_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B}^{plan} = \text{rot } \vec{A}^{plan} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (2.2.17)$$

On calcule alors la différence des densités d'énergie entre les deux états ainsi définis :

$$\mathcal{E}(\phi, \vec{A}) - \mathcal{E}(\phi, \vec{A}^{plan}) = \frac{(\frac{\partial A_3}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial A_3}{\partial x_1})^2}{2} + \frac{1}{2} |A_3 \phi|^2 \geq 0. \quad (2.2.18)$$

Par intégration on obtient l'inégalité $E_n^3(\phi, \vec{A}) \geq E_n^3(\phi, \vec{A}^{plan})$; enfin le couple $(\phi, \vec{A}^{plan}) \in \mathcal{D}_{spec}$. **CQFD**

On définit le nouvel espace fonctionnel \mathcal{C} sur \mathbb{R}^2

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{l} (\phi, \vec{A}) \text{ tel que } (\phi, \vec{A}) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \times H_{loc}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \\ (\phi, \vec{A}) \text{ est périodique de jauge suivant le réseau } \mathcal{L}. \end{array} \right\} \quad (2.2.19)$$

Si (ϕ, \vec{A}) appartient à \mathcal{C} , alors on peut construire un élément (ϕ', \vec{A}') de \mathcal{D}_{spec} par la formule $(\phi', \vec{A}')(x_1, x_2, x_3) = (\phi, \vec{A})(x_1, x_2)$. Cela définit une application bijective de \mathcal{C} dans \mathcal{D}_{spec} .

Maintenant tous les champs magnétiques utilisés seront de la forme $B\vec{e}_3$ tandis que les potentiels vecteurs vérifieront $\vec{A} \cdot \vec{e}_3 = 0$. C'est pourquoi on note maintenant

$$\text{rot} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}. \quad (2.2.20)$$

Définition 2.2.9 . On introduit le potentiel vecteur $\vec{C} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Ce potentiel vérifie $\text{div } \vec{C} = 0$ et $\text{rot } \vec{C} = 1$.

On construit une fonctionnelle sur \mathcal{C}

$$\begin{aligned} E_n^2(\phi, \vec{A}) &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|ik^{-1} \vec{\nabla} \phi + \vec{A} \phi\|^2 + \frac{1}{4} (1 - |\phi|^2)^2 \\ &\quad + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{A} - H_{ext})^2. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

On rappelle que Ω est défini à l'équation (2.1.6).

Si (ϕ', \vec{A}') appartient à \mathcal{D}_{spec} alors le couple (ϕ, \vec{A}) de \mathcal{C} qui lui correspond vérifie $E_n^2(\phi, \vec{A}) = E_n^3(\phi', \vec{A}')$.

Le théorème 2.2.5 nous dit que E_n^2 est bien défini si le couple (ϕ, \vec{A}) appartient à \mathcal{C} . Le théorème suivant est évident d'après les calculs précédents et le théorème 2.2.7.

Théorème 2.2.10 . On a l'égalité suivante

$$\inf_{(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{C}} E_n^2(\phi, \vec{A}) = \inf_{(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{D}} E_n^3(\phi, \vec{A}). \quad (2.2.22)$$

Cela implique que du point de vue énergétique la restriction de la fonctionnelle à l'espace \mathcal{C} ne fait perdre aucune information sur la valeur du minimum de la fonctionnelle.

Notre problème est donc maintenant un problème en dimension 2.

2.3 Réduction à un problème sur le tore

Dans cette section, on effectue un changement de jauge de telle sorte que les fonctions g^t de l'équation (2.1.9) prennent une forme standard.

Conformément à l'article [BGT], on pose par la suite

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = x_2 \\ z = x_1 + ix_2. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Si f est une fonction C^∞ non constante sur le tore \mathbb{R}^2/\mathcal{L} alors la suite de couples $(\phi_n, \vec{A}_n) = (\phi e^{inkf}, \vec{A} + n \vec{\nabla} f)$ n'admet aucune sous suite convergente et est d'énergie constante. La fonctionnelle E_n^2 n'est donc pas coercive sur \mathcal{C} . Cela signifie que le contrôle sur E_n^2 ne se transforme pas en contrôle sur les normes.

On cherche donc à lever cette dégénérescence en quotientant par le groupe d'équivalence de jauge. Plus précisément, dans le théorème suivant, on cherche pour chaque classe un représentant naturel.

Le couple (ϕ, \vec{A}) appartient à \mathcal{C} et par conséquent

$$\begin{cases} \forall t \in \mathcal{L} \text{ il existe } g^t \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ tel que} \\ \phi(z+t) = e^{ikg^t(z)} \phi(z) \text{ et} \\ \vec{A}(z+t) = \vec{A}(z) + \vec{\nabla} g^t(z). \end{cases} \quad (2.3.2)$$

On définit alors la fonction $g_{s,t}$ par

$$g_{s,t}(z) = g^t(z+s) + g^s(z), \quad (2.3.3)$$

et la fonction $K_{s,t}$ par

$$K_{s,t}(z) = kg_{s,t}(z) - kg_{t,s}(z). \quad (2.3.4)$$

Théorème 2.3.1 . *Pour tout $(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{C}$ et tout $(s, t) \in \mathcal{L}^2$ la fonction $K_{s,t}$ définie par (2.3.2), (2.3.3) et (2.3.4) est constante. Elle ne dépend pas de la fonction g^t apparaissant dans (2.3.2). De plus si la fonction ϕ est non identiquement nulle alors $K_{v_1, v_2} \in 2\pi\mathbb{Z}$ avec v_i défini en (2.1.3).*

Preuve. En décomposant le potentiel $\vec{A}(z+t+s)$ de deux façons différentes, on obtient les équations suivantes

$$\begin{aligned} \vec{A}(z+t+s) &= \vec{A}(z+s) + \vec{\nabla} g^t(z+s) \\ &= \vec{A}(z) + \vec{\nabla} (g^t(z+s) + g^s(z)) \\ &= \vec{A}(z) + \vec{\nabla} g^{t+s}(z). \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

On obtient donc l'égalité

$$\overrightarrow{\nabla}(g^{t+s}(z) - g^t(z+s) - g^s(z)) = 0, \quad (2.3.6)$$

ce qui donne par intégration

$$g^{t+s}(z) - g^t(z+s) - g^s(z) = Cste. \quad (2.3.7)$$

On appelle la constante d'intégration $\frac{2\pi}{k}C_{s,t}$. La fonction $K_{s,t}$ est donc constante sur \mathbb{C} puisque

$$K_{s,t}(z) = 2\pi(C_{t,s} - C_{s,t}). \quad (2.3.8)$$

Le calcul suivant prouve que la fonction $K_{s,t}$ ne dépend que du couple (ϕ, \vec{A}) .
On a :

$$\begin{aligned} K_{s,t}(0) &= kg_{s,t}(0) - kg_{t,s}(0) \\ &= [kg^t(s) + kg^s(0)] - [kg^s(t) + kg^t(0)] \\ &= [kg^t(s) - kg^t(0)] + [kg^s(0) - kg^s(t)]. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

En effet les expressions $kg^t(s) - kg^t(0)$ ne changent pas, si on ajoute une constante à g^t .

On prouve maintenant que la fonction $K_{s,t}$ est bilinéaire sur le réseau \mathcal{L} par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} K_{r+s,t}(0) &= kg_{r+s,t}(0) - kg_{t,r+s}(0) \\ &= [kg^t(r+s) + kg^{r+s}(0)] - [kg^{r+s}(t) + kg^t(0)] \\ &= kg^t(r+s) + [kg^s(r) + kg^r(0) + \frac{2\pi}{k}C_{s,t}] \\ &\quad - [kg^s(t+r) + kg^r(t) + \frac{2\pi}{k}C_{s,t}] - kg^t(0) \\ &= [kg^t(r+s) + kg^s(r) - kg^t(r) - kg^s(t+r)] \\ &\quad + [kg^t(r) + kg^r(0) - kg^r(t) - kg^t(0)] \\ &= K_{s,t}(r) + K_{r,t}(0). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Le résultat est obtenu puisque la fonction $K_{s,t}$ est indépendante de z . L'antisymétrie de $K_{s,t}$ est évidente.

Le calcul (2.3.5) pour \vec{A} possède un analogue pour ϕ qui implique l'équation suivante. Il suffit de décomposer $\phi(z+s+t)$ et d'utiliser (2.3.2) :

$$\phi(z)(1 - e^{i2\pi C_{s,t}}) = 0. \quad (2.3.11)$$

Si la fonction ϕ est non identiquement nulle alors l'égalité (2.3.11) implique que $C_{s,t} \in \mathbb{Z}$ pour tout $s, t \in \mathcal{L}^2$ et donc $K_{s,t}(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$. L'espace des formes bilinéaires antisymétriques sur $\mathcal{L}^2 \simeq \mathbb{Z}^2$ est de dimension 1. Cela implique l'existence d'un entier relatif d tel que

$$K_{n_1 v_1 + n_2 v_2, n'_1 v_1 + n'_2 v_2} = 2\pi d(n_2 n'_1 - n_1 n'_2). \quad (2.3.12)$$

Le théorème est démontré puisque $2\pi d = -K_{v_1, v_2}$.

CQFD

Théorème 2.3.2 . Soit (ϕ, \vec{A}) un élément de l'espace \mathcal{C} (cf (2.2.19)). Alors le couple (ϕ, \vec{A}) est équivalent à un couple $(\psi, H_{int} \vec{C} + \vec{P})$ après un changement de jauge et une translation selon les variables x et y .

Le couple $(\psi, H_{int} \vec{C} + \vec{P})$ vérifie les conditions :

- (a) $\psi(z+t) = e^{i \frac{k H_{int}}{2} (t_x y - t_y x)} \psi(z),$
- (b) \vec{P} est \mathcal{L} -périodique,
- (c) $\text{div } \vec{P} = 0.$

Le potentiel \vec{C} est défini à la définition 2.2.9 et le champ H_{int} s'exprime à partir du couple (ϕ, \vec{A}) comme

$$H_{int}|\Omega| = \int_{\Omega} \text{rot } \vec{A}. \quad (2.3.13)$$

Si $H_{int} \neq 0$ alors on peut aussi imposer (d) $\int_{\Omega} \vec{P} = 0$.

Remarque 2.3.3 . Le théorème est énoncé dans le cadre C^∞ dans [BGT]. Nous montrons ici une version H^1 . La comparaison des techniques utilisées sera faite plus loin (Remarque 2.3.5).

Il n'y a pas a priori d'unicité pour le couple $(\psi, H_{int} \vec{C} + \vec{P})$.

Preuve.

1^{ère} étape :

Supposons que le résultat soit vrai, nous allons alors trouver une relation entre H_{int} , d et K_{v_1, v_2} .

Le couple (ϕ, \vec{A}) est équivalent de jauge au couple $(\psi, H_{int} \vec{C} + \vec{P})$ où \vec{P} est \mathcal{L} -périodique. Cela signifie qu'il existe une fonction $\eta \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tel que

$$\vec{A}(z) = \frac{H_{int}}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \vec{P}(z) + \vec{\nabla} \eta(z). \quad (2.3.14)$$

On utilise alors les fonctions g^t introduites auparavant

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} g^t(z) &= \vec{A}(z+t) - \vec{A}(z) \\ &= \frac{H_{int}}{2} \begin{pmatrix} -t_y \\ t_x \end{pmatrix} + \vec{\nabla} [\eta(z+t) - \eta(z)]\end{aligned}\quad (2.3.15)$$

On a utilisé l'expression (2.3.14). On intègre l'équation (2.3.15)

$$\begin{cases} g^{v_1}(z) = \frac{H_{int}}{2}(\xi_1 y - \eta_1 x) + \eta(z+v_1) - \eta(z) + K_{v_1} \\ g^{v_2}(z) = \frac{H_{int}}{2}(\xi_2 y - \eta_2 x) + \eta(z+v_2) - \eta(z) + K_{v_2}. \end{cases}\quad (2.3.16)$$

On rappelle (cf (2.1.3)) que $v_j = (\xi_j, \eta_j) \in \mathbb{R}^2$ ($j=1,2$).

Les réels K_{v_1} et K_{v_2} sont des constantes d'intégration.

Ensuite en faisant des combinaisons linéaires de ces expressions, on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned}2\pi d &= -K_{v_1, v_2} \\ &= kg_{v_2, v_1}(0) - kg_{v_1, v_2}(0) \\ &= [kg^{v_1}(v_2) + kg^{v_2}(0)] - [kg^{v_2}(v_1) + kg^{v_1}(0)] \\ &= [kg^{v_1}(v_2) - kg^{v_1}(0)] - [kg^{v_2}(v_1) - kg^{v_2}(0)] \\ &= kH_{int}|\Omega|.\end{aligned}\quad (2.3.17)$$

Ce dernier calcul nous donne l'expression de H_{int} en fonction de d , lien qui n'avait rien d'évident a priori.

On a donc obtenu :

$$H_{int} = \frac{2\pi d}{k|\Omega|}.\quad (2.3.18)$$

La fonction \vec{P} étant \mathcal{L} -périodique on a $\int_{\Omega} \text{rot } \vec{P} = 0$. En intégrant le champ magnétique on obtient

$$\int_{\Omega} \text{rot } \vec{A} = \int_{\Omega} H_{int} + \text{rot } \vec{P} = H_{int}|\Omega|.\quad (2.3.19)$$

Le flux magnétique est donc quantifié, $\int_{\Omega} \text{rot } \vec{A} \in \frac{2\pi}{k}\mathbb{Z}$. Pour la suite des calculs, on pose

$$\begin{aligned}\vec{A}^p(z) &= \vec{A}(z) - \frac{H_{int}}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \\ \begin{cases} g_p^{v_1}(z) = g^{v_1}(z) - \frac{H_{int}}{2}(\xi_1 y - \eta_1 x), \\ g_p^{v_2}(z) = g^{v_2}(z) - \frac{H_{int}}{2}(\xi_2 y - \eta_2 x). \end{cases}\end{aligned}\quad (2.3.20)$$

Ces nouvelles fonctions vérifient une équation identique à l'équation (2.3.15)

$$\vec{\nabla} g_p^t(z) = \vec{A}^p(z+t) - \vec{A}^p(z) \text{ avec } t \in \mathcal{L}. \quad (2.3.21)$$

On a soustrait le potentiel $H_{int} \vec{C}$ à \vec{A} et donc

$$g_p^{v_1}(z) + g_p^{v_2}(z+v_1) - g_p^{v_1}(z+v_2) - g_p^{v_2}(z) = 0. \quad (2.3.22)$$

2^{eme} étape :

On souhaite maintenant rendre le potentiel vecteur \vec{A}^p périodique par un changement de jauge. Supposons que l'on sache résoudre les équations suivantes où η est l'inconnue

$$\begin{cases} g_p^{v_1}(z) = \eta(z+v_1) - \eta(z) \\ g_p^{v_2}(z) = \eta(z+v_2) - \eta(z) \end{cases} \quad (2.3.23)$$

avec $g_p^t \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\eta \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Si η est solution de (2.3.23) alors le potentiel $\vec{A}^p - \vec{\nabla} \eta(z)$ est périodique et il ne restera plus à faire que des opérations sur le domaine Ω .

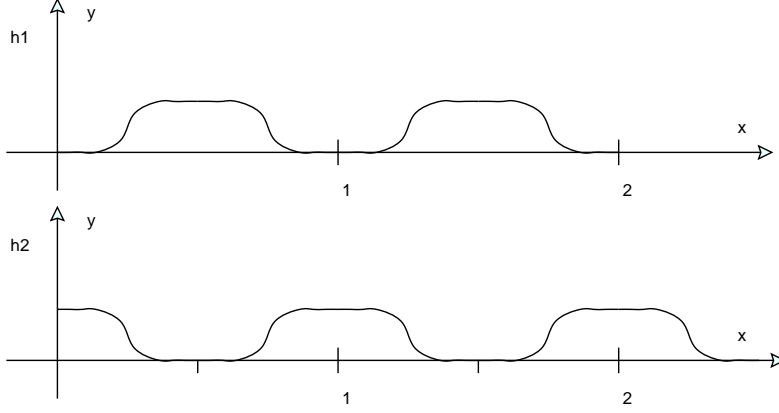
Les équations (2.3.23) n'ont pas une solution unique, on peut en effet rajouter à η une fonction \mathcal{L} -périodique pour obtenir une autre solution de (2.3.23). La première idée qui vient à l'esprit pour résoudre ces équations est la suivante : *Posons $\eta = 0$ sur un domaine fondamental de \mathcal{L} alors les équations (2.3.23) sont uniquement solubles puisque $g_p^{v_1}(z) + g_p^{v_2}(z+v_1) - g_p^{v_1}(z+v_2) - g_p^{v_2}(z) = 0$. Le problème est que cette fonction η n'appartient pas a priori à $H_{loc}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, ce qui est pourtant indispensable à cause des problèmes qui apparaissent au bord de Ω .*

Il faut donc trouver un procédé permettant de résoudre dans $H_{loc}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Examinons d'abord comment on peut résoudre en dimension 1 le problème.

Proposition 2.3.4 . Soit $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in W_{m,loc}^p(\mathbb{R})$ alors $\exists g \in W_{m,loc}^p(\mathbb{R})$ tel que $f(x) = g(x+1) - g(x)$

Preuve. On construit deux fonctions C^∞ vérifiant $1 = h_1 + h_2$, h_1 et h_2 1-périodiques. On suppose de plus que la fonction h_1 a un support compact inclus dans $]0, 1[$ et ses translatés et que la fonction h_2 a un support compact inclus dans $]1/2, 3/2[$ et ses translatés. Le dessin ci-dessous montre plus clairement le comportement de ces fonctions



On considère les fonctions $f_1 = fh_1$, $f_2 = fh_2$ et on résout le système d'équations

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x+1) - g_1(x), & g_1 = 0 \text{ sur } [0, 1], \\ f_2(x) = g_2(x+1) - g_2(x), & g_2 = 0 \text{ sur } [1/2, 3/2]. \end{cases} \quad (2.3.24)$$

Il est possible de résoudre le système (2.3.24) en obtenant la même régularité pour g_i que f_i .

La solution du problème est alors $g_1 + g_2$.

CQFD

Revenons à notre cas en dimension 2.

On construit une partition C^∞ de l'unité ϕ_{ij} ($i, j = 1, 2$) comme suit : on écrit z sous la forme $t_1v_1 + t_2v_2$ avec $t_i \in \mathbb{R}$ et on définit

$$\phi_{ij}(z) = h_i(t_1)h_j(t_2), \quad (2.3.25)$$

avec h_1 et h_2 définis dans les dessins précédents.

Montrons que le problème (2.3.23) est soluble pour les fonctions suivantes

$$\begin{cases} g_{ij}^{v_1}(z) = \phi_{ij}(z)g_p^{v_1}(z), \\ g_{ij}^{v_2}(z) = \phi_{ij}(z)g_p^{v_2}(z). \end{cases} \quad (2.3.26)$$

Les fonctions ϕ_{ij} étant périodiques selon le réseau \mathcal{L} , les fonctions g_{ij} vérifient l'équation algébrique suivante

$$g_{ij}^{v_1}(z) + g_{ij}^{v_2}(z + v_1) - g_{ij}^{v_1}(z + v_2) - g_{ij}^{v_2}(z) = 0. \quad (2.3.27)$$

On peut résoudre les équations (2.3.27) dans la régularité H_{loc}^2 puisque les fonctions g_{ij} sont nulles au voisinage du bord de Ω et sont de régularité H_{loc}^2 .

On appelle η_{ij} une solution de classe H^2 des équations (2.3.27). Alors la fonction $\eta = \eta_{11} + \eta_{12} + \eta_{21} + \eta_{22}$ est solution du problème (2.3.23). On a prouvé le résultat souhaité.

3^{eme} étape :

On a donc réussi à rendre le potentiel vecteur périodique selon \mathcal{L} . Montrons que l'on peut rendre sa divergence nulle par un changement de jauge.

Le potentiel $\vec{A}^p - \vec{\nabla}\eta$ est périodique par rapport à \mathcal{L} , par conséquent sa divergence est périodique par rapport à \mathcal{L} et son coefficient de Fourier d'indice $(0,0)$ est nul. La fonction $\text{div} [\vec{A}^p - \vec{\nabla}\eta]$ est donc orthogonale au noyau du laplacien sur le tore. On peut donc par série de Fourier trouver un unique ρ dans $H^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R})$ d'intégrale nulle tel que $\Delta\rho = \text{div} [\vec{A}^p - \vec{\nabla}\eta]$. Nous reviendrons sur l'étude du laplacien dans la section 3.1.2 .

Après le changement de jauge

$$\begin{cases} \phi & \rightarrow \phi e^{-ik(\rho+\eta)}, \\ \vec{A} & \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}(\rho + \eta) \end{cases} \quad (2.3.28)$$

on obtient un nouveau potentiel vecteur de divergence nulle et \vec{A} est de la forme $H_{int}\vec{C} + \vec{P}$ avec $\vec{C} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ et \vec{P} périodique.

Remarque 2.3.5 . Dans cette réduction du potentiel vecteur, on a fait deux opérations : une réduction topologique en montrant que l'on peut se ramener à un potentiel périodique plus un champ magnétique constant quantifié et une réduction analytique qui consiste à prendre la jauge de Coulomb ($\text{div } \vec{A} = 0$). La méthode de l'article [BGT] consistait à faire d'abord une réduction analytique, puis une réduction topologique. Leur méthode (ou plutôt l'appendice de [BGT]) met en évidence des problèmes à coins qui n'apparaissent pas ici.

4^{eme} étape :

L'invariance de jauge par translation s'écrit

$$\begin{cases} \phi(z + v_i) & = e^{ikg^{v_i}(z)} \phi(z) \\ (H_{int}\vec{C} + \vec{P})(z + v_i) & = (H_{int}\vec{C} + \vec{P})(z) + \vec{\nabla} g^{v_i}(z) \text{ pour } i = 1, 2. \end{cases} \quad (2.3.29)$$

On obtient donc en simplifiant la deuxième équation de (2.3.29)

$$\frac{H_{int}}{2} \begin{pmatrix} -\eta_i \\ \xi_i \end{pmatrix} = \vec{\nabla} g^{v_i}(z) \text{ avec } i \in \{1, 2\}. \quad (2.3.30)$$

En intégrant l'équation (2.3.30), on obtient

$$g^{v_i}(z) = \beta_i + \frac{H_{int}}{2}(\xi_i y - \eta_i x) \text{ avec } i \in \{1, 2\}. \quad (2.3.31)$$

Maintenant on souhaite éliminer les termes β_i tout en gardant la moyenne du potentiel vecteur \vec{P} égale à 0 sur Ω . Pour cela on applique une double transformation : d'abord une translation du couple (ϕ, \vec{P}) puis un changement de jauge linéaire (Si on fait d'abord le changement linéaire puis la translation on obtient un système non linéaire).

Soit $u = u_x + iu_y$ le nombre complexe selon lequel on translate le couple (ϕ, \vec{P}) et soit $h(x, y) = h_x x + h_y y$ la fonction de changement de jauge.

L'application de ces deux transformations donne alors le nouveau couple (ϕ', \vec{P}')

$$\begin{cases} \vec{P}'(z) &= \vec{P}(z + u) + \begin{pmatrix} -\frac{H_{int}}{2}u_y + h_x \\ \frac{H_{int}}{2}u_x + h_y \end{pmatrix} \\ \phi'(z) &= \phi(z + u)e^{ik[h_x x + h_y y]}. \end{cases} \quad (2.3.32)$$

La fonction ϕ' se transforme sur le réseau \mathcal{L} par :

$$\begin{aligned} \phi'(z + v_i) &= e^{ik[h_x(x+\xi_i) + h_y(y+\eta_i)]}\phi(z + v_i + u) \\ &= e^{ik[h_x(x+\xi_i) + h_y(y+\eta_i) + \beta_i + \frac{H_{int}}{2}(\xi_i(y+u_y) - \eta_i(x+u_x))]}\phi(z + u) \\ &= e^{ik[h_x\xi_i + h_y\eta_i + \beta_i + \frac{H_{int}}{2}(\xi_i(y+u_y) - \eta_i(x+u_x))]}\phi'(z) \\ &= e^{ik[\frac{H_{int}}{2}(\xi_i y - \eta_i x)]}e^{ik[h_x\xi_i + h_y\eta_i + \beta_i + \frac{H_{int}}{2}(\xi_i u_y - \eta_i u_x)]}\phi'(z). \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

La moyenne de la partie périodique du potentiel vecteur sur Ω est égale à

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \vec{P} + \begin{pmatrix} -\frac{H_{int}}{2}u_y + h_x \\ \frac{H_{int}}{2}u_x + h_y \end{pmatrix}. \quad (2.3.34)$$

La fonction ϕ' doit se comporter comme énoncé dans le théorème 2.3.2, cela implique modulo $\frac{2\pi}{k}$

$$\begin{cases} h_x \xi_1 + h_y \eta_1 = -\beta_1 - \frac{H_{int}}{2}(\xi_1 u_y - \eta_1 u_x) \\ h_x \xi_2 + h_y \eta_2 = -\beta_2 - \frac{H_{int}}{2}(\xi_2 u_y - \eta_2 u_x). \end{cases} \quad (2.3.35)$$

Si on pose $(u_x, u_y) = (0, 0)$, le système (2.3.35) devient une équation d'inconnues (h_x, h_y) .

Ce système possède une solution unique puisque v_1 et v_2 forment une base de \mathbb{R}^2 . La solution ϕ' pour ces choix vérifie la relation voulue :

$$\phi'(z + v_i) = e^{ik \frac{H_{int}}{2} (\xi_i y - \eta_i x)} \phi'(z) . \quad (2.3.36)$$

Les autres relations exigées sont conservées ; on a prouvé le résultat souhaité. Si $H_{int} \neq 0$ on exige que la partie périodique du potentiel vecteur ait une moyenne nulle ; cela nous donne

$$\begin{cases} \frac{H_{int}}{2} u_y = h_x + C_x \\ \frac{H_{int}}{2} u_x = -h_y + C_y \end{cases} \quad (2.3.37)$$

où C_x et C_y sont des réels positifs. Le système à résoudre est alors

$$\begin{cases} 2h_x \xi_1 + 2h_y \eta_1 = -\beta_1 - \xi_1 C_x + \eta_1 C_y \\ 2h_x \xi_2 + 2h_y \eta_2 = -\beta_2 - \xi_2 C_x + \eta_2 C_y. \end{cases} \quad (2.3.38)$$

Ce système possède une solution unique puisque $2v_1$ et $2v_2$ forment une base de \mathbb{R}^2 . **CQFD**

Maintenant il nous faut ramener le problème fonctionnel au tore \mathbb{R}^2/\mathcal{L} ; pour le potentiel vecteur, cela ne pose pas de problème puisque l'espace des potentiels possibles est un espace affine et que le potentiel \vec{P} est périodique. Mais pour la fonction d'onde la réduction est plus délicate.

Théorème 2.3.6 . *Les fonctions $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ vérifiant*

$$\phi(z + t) = e^{i \frac{\pi d}{|\Omega|} (t_x y - t_y x)} \phi(z), \quad \forall t \in \mathcal{L}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^2 \quad (2.3.39)$$

avec $d = \frac{k H_{int} |\Omega|}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ forment les sections d'un fibré vectoriel sur le tore \mathbb{R}^2/\mathcal{L} . On appelle ce fibré E_d . Si $d \neq 0$ alors il est non trivial.

Preuve. Voir [GH], p. 307. **CQFD**

Corollaire 2.3.7 . *Si ϕ est une section continue de E_d avec $d \neq 0$ alors $\exists z \in \mathbb{R}^2/\mathcal{L}$ tel que $\phi(z) = 0$.*

Preuve. D'après le théorème 2.3.6, le fibré E_d est non trivial.

Si la fonction ϕ ne s'annule pas alors cette section définit une trivialisatoin du fibré. C'est impossible, donc il existe z tel que $\phi(z) = 0$. **CQFD**

Le fibré étant C^∞ , on peut définir des espaces de sections de classe

H^1 à partir des sections C^∞ (voir par exemple [LM], p. 170).

Le théorème 2.3.2 joint au théorème 2.3.6 nous permet d'introduire un autre espace fonctionnel plus adapté à notre problème de minimisation et qui fait intervenir le tore uniquement.

Rappelons que $\vec{C} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ et que H_{int} vérifie la quantification $2\pi d = kH_{int}|\Omega|$. Pour $d \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\mathcal{B}_d = \left\{ \begin{array}{l} (\phi, \vec{A}) \in H^1(E_d) \times H^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2) \text{ tel que} \\ \phi(z + v_i) = e^{i\frac{\pi d}{|\Omega|}(\xi_i y - \eta_i x)} \phi(z), \\ \vec{A} = H_{int} \vec{C} + \vec{P} \text{ avec } \vec{P} \text{ périodique} \\ \text{div } \vec{P} = 0 \text{ et } \int_{\Omega} \vec{P} = 0 \text{ si } d \neq 0. \end{array} \right\} \quad (2.3.40)$$

On utilisera la notation

$$\mathcal{B} = \cup_{d \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_d \quad (2.3.41)$$

La fonctionnelle utilisée est toujours notée E_n^2 car $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ où \mathcal{C} est défini à l'équation (2.2.19).

Par le théorème 2.3.6, cet espace s'identifie aux sections H^1 d'un fibré vectoriel de dimension réelle 4 sur le tore.

L'espace \mathcal{B}_d est un espace affine, ce qui simplifie l'analyse du problème. Il est intéressant de remarquer que l'espace \mathcal{D} défini au début du chapitre n'est pas un espace vectoriel ni même un espace affine, ceci provenant de la structure assez complexe du groupe de jauge.

2.4 Modélisation finale du problème traité

Dans les sections précédentes, on a transformé un problème de minimisation sur \mathbb{R}^3 associé à des conditions de périodicité en un problème défini sur un fibré vectoriel de dimension 4 au dessus du tore \mathbb{R}^2/\mathcal{L} .

Dans cette section, on montre quelques résultats élémentaires sur cette fonctionnelle et on réduit le problème de minimisation en deux sous problèmes plus simples.

On note $E^{int,d}$ la fonctionnelle définie sur \mathcal{B}_d qui a pour expression

$$\begin{aligned} E^{int,d}(\phi, \vec{P}) &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|ik^{-1} \vec{\nabla} \phi + (H_{int} \vec{C} + \vec{P})\phi\|^2 + \frac{1}{4} (1 - |\phi|^2)^2 \\ &+ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{P})^2 \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

avec

$$\vec{C} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}. \quad (2.4.2)$$

On calcule l'énergie magnétique $\int_{\Omega} (\text{rot } \vec{A} - H_{ext})^2 dx dy$ avec l'expression

$$\vec{A} = \vec{P} + H_{int} \vec{C}, \text{rot } \vec{A} - H_{ext} = \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} + H_{int} - H_{ext}. \quad (2.4.3)$$

Puisque les fonctions P_x et P_y sont périodiques et de classe H^1 , elles admettent un développement en série de Fourier. Les fonctions $\frac{\partial P_y}{\partial x}$ et $\frac{\partial P_x}{\partial y}$ ont un développement de Fourier sans terme constant. Cela signifie que la fonction $(\frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y})$ est orthogonale aux constantes et donc que

$$\int_{\Omega} (\text{rot } \vec{A} - H_{ext})^2 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right)^2 + (H_{int} - H_{ext})^2 |\Omega|. \quad (2.4.4)$$

La fonctionnelle E_n^2 se décompose comme ceci :

$$E_n^2(\phi, \vec{A}) = E^{int,d}(\phi, \vec{P}) + \frac{1}{2} (H_{int} - H_{ext})^2. \quad (2.4.5)$$

Nous indiquons ci-dessous la résolution du problème de minimisation dans le cas $d = 0$.

Proposition 2.4.1 . *Si on impose $d = 0$, autrement dit que $H_{int} = 0$, alors $\inf_{(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{B}_0} E_n^2(\phi, \vec{A}) = E_n^2(1, 0) = \frac{1}{2} H_{ext}^2$.*

Preuve. Ici $\vec{C} = 0$, il suffit d'appliquer la formule (2.4.5) pour obtenir une inégalité sur la fonctionnelle

$$E_n^2(\phi, \vec{A}) \geq \frac{1}{2} (H_{int} - H_{ext})^2 = \frac{1}{2} H_{ext}^2 = E_n^2(1, 0) \quad (2.4.6)$$

CQFD

Proposition 2.4.2 . *On a l'inégalité suivante sur l'énergie*

$$\inf_{(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{B}} E_n^2(\phi, \vec{A}) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \min_{d \in \mathbb{Z}} \left(\frac{2\pi d}{k|\Omega|} - H_{ext} \right)^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{2k^2|\Omega|^2}. \quad (2.4.7)$$

De plus il existe H_0 tel que si $H_{ext} > H_0$, les solutions minimisantes vérifient $H_{int} \neq 0$.

Preuve. On prend $\phi = 0$ et $\vec{A} = H_{int}\vec{C}$ et le premier résultat en découle.
Si $H_{ext} > \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{k^2|\Omega|^2}}$, alors on a

$$\inf_{(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{B}_0} E_n^2(\phi, \vec{A}) = E_n^2(1, 0) = \frac{1}{2}H_{ext}^2 > \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{2k^2|\Omega|^2} \geq \inf_{(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{B}} E_n^2(\phi, \vec{A}) \quad (2.4.8)$$

Par conséquent, le minimum n'est pas atteint par un état vérifiant $H_{int} = 0$.
On a donc le résultat avec

$$H_0 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{k^2|\Omega|^2}}. \quad (2.4.9)$$

CQFD

Proposition 2.4.3 . Si $H_{ext} = 0$ alors le minimum de E_n^2 est atteint pour le couple $(\phi, \vec{P}) = (1, 0)$ avec $d = 0$. On a $E_n^2(1, 0) = 0$.

Preuve. On a toujours $E_n^2 \geq 0 = E_n^2(1, 0)$ par une majoration triviale. **CQFD**

De ces propositions on peut retenir que le supraconducteur ne peut pas empêcher la pénétration du champ magnétique à l'intérieur du matériau pour toutes les valeurs du champ extérieur.

Nous démontrerons au théorème 4.4.5 qu'il existe un champ $H_{c2}(k)$ tel que si $H_{ext} > H_{c2}(k)$ alors le seul couple (ϕ, \vec{A}) réalisant le minimum est le couple $(0, 0)$.

2.4.1 Hypothèse : Quantification choisie

La valeur de d dans \mathbb{Z} qui minimise le problème variationnel est inconnue à priori.

La quantification transforme le problème de la minimisation de E_n^2 en un autre problème : La minimisation des fonctionnelles $E^{int,d}$ sur les espaces \mathcal{B}_d . On a trouvé le minimum de cette fonctionnelle pour $d = 0$ à la proposition 2.4.1, on peut donc se limiter au cas $d \neq 0$.

Ensuite il faudrait minimiser sur d mais nous n'effectuons pas cette étude.

Hypothèse 2.4.4 . Dans la suite des calculs, on va supposer que l'on est dans la configuration $d = 1$.

L'hypothèse 2.4.4 simplifie l'analyse de la bifurcation. C'est une hypothèse qui est faite dans pratiquement tous les articles sur la question, voir par exemple les articles [Od1], [Od2] et [BGT]. Cependant l'article [Chap] aborde légèrement la minimisation en quantification supérieure : $d > 1$.

C'est une hypothèse très naturelle, que l'expérience physique semble confirmer puisque l'on voit apparaître des cellules hexagonales avec un seul vortex par cellule. Cependant la raison essentielle de cette hypothèse est que les calculs sont plus simples dans ce cadre.

2.4.2 Hypothèse 2 : choix de la géométrie du réseau

Hypothèse 2.4.5 . *On fixe l'angle entre les deux vecteurs v_1 et v_2 ainsi que le quotient de leurs longueurs.*

Proposition 2.4.6 . *Les hypothèses 2.4.4 et 2.4.5 fixent la forme du réseau à isométrie près.*

Preuve. Par l'hypothèse 2.4.4, on a $d = 1$ et on a trouvé en (2.3.18) la relation $d = \frac{kH_{int}|\Omega|}{2\pi}$. On obtient

$$|\Omega| = \frac{2\pi}{kH_{int}}. \quad (2.4.10)$$

L'hypothèse 2.4.5 fixe l'angle entre les vecteurs et le quotient de leurs longueurs. La forme du réseau est donc fixée à isométrie près. **CQFD**

Les deux vecteurs qui définissent le réseau \mathcal{L} sont

$$\begin{cases} v_1 = (\xi_1, \eta_1) \\ v_2 = (\xi_2, \eta_2) \end{cases} \quad (2.4.11)$$

tandis que Ω est défini à l'équation (2.1.6). On rappelle que $|\Omega|$ désigne l'aire du domaine fondamental.

Modulo une isométrie du plan on peut supposer que le vecteur v_1 est parallèle à l'axe Ox . Il existe alors deux vecteurs v'_1 et v'_2 tel que

$$\begin{cases} v'_1 = (r, 0) = (\xi'_1, \eta'_1) \\ v'_2 = (w, u) = (\xi'_2, \eta'_2) \end{cases} \quad (2.4.12)$$

avec $r > 0$, $u > 0$, $ru = 1$ et

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{kH_{int}}} v'_1 \\ v_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{kH_{int}}} v'_2. \end{cases} \quad (2.4.13)$$

On note \mathcal{L}' le réseau de \mathbb{R}^2 engendré par les vecteurs v'_i .
On appelle Ω' le domaine fondamental de ce réseau, il vérifie $|\Omega'| = 1$.

2.4.3 Changement de problème

On pose

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2\pi k}{H_{int}} \\ \vec{A}_0 = \pi \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (2.4.14)$$

Définition 2.4.7 . On définit un nouvel espace fonctionnel \mathcal{A}' par :

$$\mathcal{A}' = \left\{ \begin{array}{l} (\phi, \vec{a}) \in H^1(E_1) \times H^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}', \mathbb{R}^2) \\ \text{avec } \phi(z + v'_i) = e^{i\pi(\xi'_i y - \eta'_i x)} \phi(z), \\ \vec{a} \text{ } \mathcal{L}'\text{-périodique, } \operatorname{div} \vec{a} = 0 \text{ et } \int_{\Omega'} \vec{a} = 0. \end{array} \right\} \quad (2.4.15)$$

Le fait que l'on se limite à des états de quantification 1 est codé dans cette définition par le fait que $ru = 1$.

Définition 2.4.8 . On définit une fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ sur \mathcal{A}' :

$$\begin{aligned} \forall (\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}' \\ F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) = \int_{\Omega'} \frac{1}{2} \|i \vec{\nabla} \phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \frac{1}{4}(\lambda - |\phi|^2)^2 + \frac{k^2}{2} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Définition 2.4.9 . On définit la fonction $D_{\lambda,k}$ par

$$\begin{aligned} D_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) &= \frac{1}{\lambda^2} F_{\lambda,k}(\sqrt{\lambda} \phi, \vec{a}) \\ &= \int_{\Omega'} \frac{1}{2\lambda} \|i \vec{\nabla} \phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \frac{1}{4}(1 - |\phi|^2)^2 + \frac{k^2}{2\lambda^2} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

On s'intéresse au minimum de ces deux fonctionnelles , on pose donc

$$\begin{aligned} m_F(\lambda, k) &= \inf_{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}'} F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}), \\ m_D(\lambda, k) &= \inf_{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}'} D_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}). \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Pour alléger les calculs effectués dans cette section, on pose

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{2\pi k}{H_{int}}} \\ \beta = \sqrt{\frac{2\pi}{k H_{int}}}. \end{cases} \quad (2.4.19)$$

Proposition 2.4.10 . On pose

$$\begin{cases} W_1\phi &= \alpha\phi(\beta z) \\ W_2\vec{A} &= \alpha[\vec{A} - H_{int}\vec{C}](\beta z). \end{cases} \quad (2.4.20)$$

Alors l'application W de \mathcal{B}_1 vers \mathcal{A}'

$$\begin{cases} W : \mathcal{B}_1 &\mapsto \mathcal{A}' \\ (\phi, \vec{A}) &\mapsto (W_1\phi, W_2\vec{A}) \end{cases} \quad (2.4.21)$$

est bijective.

Preuve. Vérifions que le champ $[\vec{A} - H_{int}\vec{C}](\beta z)$ est périodique.

On sait que $(\phi, \vec{A}) \in \mathcal{B}_1$; donc on peut écrire $\vec{A} = H_{int}\vec{C} + \vec{P}$, où \vec{P} est un champ périodique pour v_1 et v_2 . On a alors

$$\begin{aligned} W_2\vec{A}(z + v'_i) &= \alpha\vec{P}(\beta[z + v'_i]) \\ &= \alpha\vec{P}(\beta z + \beta v'_i) \\ &= \alpha\vec{P}(\beta z + v_i) \\ &= \alpha\vec{P}(\beta z) \\ &= W_2\vec{A}(z). \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Calculons maintenant pour ϕ :

$$\begin{aligned} W_1\phi(z + v'_i) &= \alpha\phi(\beta[z + v'_i]) \\ &= \alpha\phi(\beta z + v_i) \\ &= \alpha e^{i\frac{\pi}{|\Omega|}\beta(\xi_i y - \eta_i x)} \phi(\beta z) \\ &= \alpha e^{i\frac{\pi}{|\Omega|}\frac{2\pi}{kH_{int}}(\xi'_i y - \eta'_i x)} \phi(\beta z) \\ &= \alpha e^{i\frac{\pi}{|\Omega|}|\Omega|(\xi'_i y - \eta'_i x)} \phi(\beta z) \\ &= \alpha e^{i\pi(\xi'_i y - \eta'_i x)} \phi(\beta z) \\ &= e^{i\pi(\xi'_i y - \eta'_i x)} W_1\phi(z). \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Par conséquent, l'application W est bien à valeur dans \mathcal{A}' . Le fait qu'elle soit bijective est évident. **CQFD**

Théorème 2.4.11 . Soit (ϕ, \vec{A}) un couple appartenant à \mathcal{B}_1 on a alors

$$\lambda^2 E^{int,1}(\phi, \vec{P}) = F_{\lambda,k}(W_1\phi, W_2\vec{A}) \quad (2.4.24)$$

avec $\vec{A} = H_{int}\vec{C} + \vec{P}$.

Preuve. On appelle T le second membre de l'équation (2.4.24)

$$\begin{aligned}
T &= \int_{\Omega'} \frac{1}{2} \|i \vec{\nabla} W_1 \phi + (\vec{A}_0 + W_2 \vec{A}) W_1 \phi\|^2 + \frac{(\lambda - |W_1 \phi|^2)^2}{4} + \frac{k^2}{2} (\text{rot } W_2 \vec{A})^2 \\
&= \int_{\Omega'} \frac{1}{2} \|i \frac{2\pi}{H_{int}} \vec{\nabla} \phi(\beta z) + (\vec{A}_0 + \alpha \vec{P}(\beta z)) \alpha \phi(\beta z)\|^2 \\
&+ \int_{\Omega} \frac{(\lambda - |\phi(\beta z)|^2)^2}{4} + \frac{k^2}{2} (\frac{2\pi}{H_{int}} [\text{rot } \vec{P}](\beta z))^2 \\
&= \int_{\Omega'} \frac{1}{2} \|i \frac{2\pi}{H_{int}} \vec{\nabla} \phi + (\sqrt{\frac{k H_{int}}{2\pi}} \vec{A}_0 + \alpha \vec{P}) \alpha \phi\|^2(\beta z) \\
&+ \frac{(\lambda - |\phi(\beta z)|^2)^2}{4} + \frac{k^2}{2} (\frac{2\pi}{H_{int}} [\text{rot } \vec{P}](\beta z))^2 \\
&= (\frac{2\pi k}{H_{int}})^2 \{ \int_{\Omega'} \frac{1}{2} \| \frac{i}{k} \vec{\nabla} \phi + (\frac{H_{int}}{2\pi} \vec{A}_0 + \vec{P}) \phi \|^2(\beta z) \\
&+ \frac{(1 - |\phi(\beta z)|^2)^2}{4} + \frac{1}{2} ([\text{rot } \vec{P}](\beta z))^2 dx dy \}.
\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

On effectue maintenant le changement de variable $z' = \beta z$ dans l'intégrale et l'on se ramène alors à une intégrale sur Ω (cf (2.4.13)). On obtient

$$\begin{aligned}
T &= \lambda^2 \{ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \| \frac{i}{k} \vec{\nabla} \phi + (H_{int} \vec{C} + \vec{P}) \phi \|^2 \\
&+ \frac{(1 - |\phi|^2)^2}{4} + \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{P})^2 dx dy \} (\frac{k H_{int}}{2\pi}) \\
&= \lambda^2 |\Omega| E^{int,1}(\phi, \vec{P}) (\frac{k H_{int}}{2\pi}) \text{ par définition de } E^{int,1} \\
&= \lambda^2 E^{int,1}(\phi, \vec{P}).
\end{aligned} \tag{2.4.26}$$

On a utilisé dans la dernière équation la relation $k|\Omega|H_{int} = 2\pi$.

On obtient donc l'égalité voulue.

CQFD

Définition 2.4.12 . On définit l'énergie volumique $E_{k,H_{ext}}^V$ par

$$E_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi, \vec{a}) = \frac{1}{\lambda^2} F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) + \frac{1}{2} (H_{int} - H_{ext})^2 \tag{2.4.27}$$

avec $\lambda = \frac{2\pi k}{H_{int}}$. On définit aussi le minimum partiel $G_{k,H_{ext}}^V$ par

$$G_{k,H_{ext}}^V(H_{int}) = \frac{1}{\lambda^2} m_F(\lambda, k) + \frac{1}{2} (H_{int} - H_{ext})^2. \tag{2.4.28}$$

où m_F est définie à l'équation (2.4.18). Le minimum qui nous intéresse est $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V$, il est défini par :

$$\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V = \inf_{H_{int} > 0} G_{k,H_{ext}}^V(H_{int}). \tag{2.4.29}$$

On verra par la suite que l'infimum (2.4.29) peut ne pas être atteint sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de la thèse on enlève les ' pour simplifier l'écriture à $v'_i, \xi'_i, \eta'_i, \Omega', \mathcal{L}', \phi', \vec{a}'$ et \mathcal{A}' .

Définition 2.4.13 . (Résumé des définitions précédentes)

Dans la suite de la thèse nous utiliserons les notations suivantes :

Le réseau \mathcal{L} de périodicité est engendré par

$$\begin{cases} v_1 &= (r, 0) \\ v_2 &= (w, u) \end{cases} \quad (2.4.30)$$

et le domaine fondamental associé Ω a une aire égale à 1.

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{l} (\phi, \vec{a}) \in H^1(E_1) \times H^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2) \\ \text{avec } \phi(z + v_i) = e^{i\pi(\xi_i y - \eta_i x)} \phi(z), \\ \vec{a} \text{ } \mathcal{L}\text{-périodique, } \operatorname{div} \vec{a} = 0 \text{ et } \int_{\Omega} \vec{a} = 0. \end{array} \right\} \quad (2.4.31)$$

La fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ ayant pour expression

$$F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \frac{1}{4}(\lambda - |\phi|^2)^2 + \frac{k^2}{2} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2. \quad (2.4.32)$$

Le problème 2.1.4 prend une forme différente dans le nouveau système de coordonnées

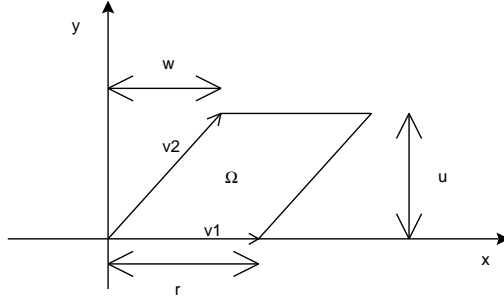
Problème 2.4.14 . Le problème qui nous occupera dans la suite de la thèse est le suivant. Trouver

$$\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V = \inf_{\substack{H_{int} \in \mathbb{R}_+^* \\ (\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}}} E_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi, \vec{a}) \quad (2.4.33)$$

et décrire les couples (ϕ, \vec{a}) qui réalisent ce minimum.

Le problème 2.4.14 est équivalent au problème 2.1.4 par le théorème 2.4.11 et la proposition 2.4.10.

Les sections ϕ vérifient $\phi(z + v_i) = e^{i\pi(\xi_i y - \eta_i x)} \phi(z)$. Ci-dessous, on représente l'allure du domaine fondamental dans les nouvelles coordonnées.



Proposition 2.4.15 . *On a les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} 0 &\leq m_F(\lambda, k) \leq \frac{\lambda^2}{4}, \\ 0 &\leq m_D(\lambda, k) \leq \frac{1}{4}, \\ m_D(\lambda, k) &= \frac{1}{\lambda^2} m_F(\lambda, k), \end{aligned} \tag{2.4.34}$$

où m_F et m_D sont définis à l'équation (2.4.18).

Preuve. On sait que $F_{\lambda,k}$ est positif, par conséquent $m_F(\lambda, k)$ est positif.

On a $F_{\lambda,k}(0, 0) = \frac{\lambda^2}{4}$ par conséquent, puisque m_F est un minimum, on a l'inégalité $m_F(\lambda, k) \leq \frac{\lambda^2}{4}$.

L'égalité $D_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) = \frac{1}{\lambda^2} F_{\lambda,k}(\sqrt{\lambda}\phi, \vec{a})$ implique l'égalité $m_D(\lambda, k) = \frac{1}{\lambda^2} m_F(\lambda, k)$.

On obtient alors facilement l'encadrement : $0 \leq m_D(\lambda, k) \leq \frac{1}{4}$. **CQFD**

Définition 2.4.16 . *On appellera "problème réduit" le problème de la minimisation de $F_{\lambda,k}$.*

Définition 2.4.17 .

- *On dit que le supraconducteur est à l'état normal si $(H_{int}, \phi, \vec{a}) = (H_{ext}, 0, 0)$ et si le minimum de la fonctionnelle $E_{k,H_{ext}}^V$ (cf (2.4.12)) est réalisé en ce point. L'énergie $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V$ est alors égale à $\frac{1}{4}$. Cet état est désigné par la lettre N .*
- *On dit que le supraconducteur est dans un état mixte si $\phi \neq 0$ et $H_{int} > 0$ et si le minimum de la fonctionnelle $E_{k,H_{ext}}^V$ (cf (2.4.12)) est réalisé en ce point. Cet état est désigné par la lettre M .*
- *On dit que le supraconducteur est à l'état pur si $H_{int} = 0$ et ϕ est constante et si le minimum de la fonctionnelle $E_{k,H_{ext}}^V$ est réalisé en ce point. L'énergie $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V$ est alors égale à $\frac{H_{ext}^2}{2}$. Cet état est désigné par la lettre P .*

Le diagramme des phases est alors l'ensemble des points (k, H_{ext}) où l'on indique sur chaque point quel est sa nature.

L'énergie $\frac{H_{ext}^2}{2}$ correspond à la quantification 0 (cf 2.4.1) et on verra plus loin que $\lim_{H_{int} \rightarrow 0} G_{k,H_{ext}}^V(H_{int}) = \frac{H_{ext}^2}{2}$.

2.5 Structure de l'espace des réseaux

On sait par les calculs de la sous-section 2.4.3 que l'on peut se ramener à la situation où

$$\begin{cases} v_1 &= (r, 0) \\ v_2 &= (w, u) \end{cases} \quad (2.5.1)$$

avec

$$ru = 1. \quad (2.5.2)$$

Un système de coordonnées possible est

$$\begin{cases} u &\in \mathbb{R}_+^*, \\ w &\in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.5.3)$$

On note \mathcal{M} l'espace des réseaux possibles, c'est à dire des réseaux engendrés par des couples de vecteurs (v_1, v_2) tel que $\det(v_1, v_2) = 1$ (chaque réseau est isomorphe à \mathbb{Z}^2).

Dans la suite de la thèse, on prendra ces coordonnées et on identifiera \mathcal{M} à

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}. \quad (2.5.4)$$

À tout élément $m = (u, w) \in \mathcal{M}$ est associé le réseau de \mathbb{R}^2 engendré par $v_{1,m} = (r, 0)$ et $v_{2,m} = (w, u)$, on l'appelle \mathcal{L}_m .

Définition 2.5.1 . Soit $m = (u, w) \in \mathcal{M}$, on définit les espaces suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{0,m} &= \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ tel que } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ &\quad f(x+r, y) = f(x, y), \ f(x+w, y+u) = f(x, y)\} \\ \mathcal{E}_{1,m} &= \{\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ tel que } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ &\quad \phi(x+r, y) = e^{i\pi r y} \phi(x, y), \ \phi(x+w, y+u) = e^{i\pi(wy-xu)} \phi(x, y)\} \\ \mathcal{V}_m &= \{\vec{a} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \text{ potentiel vecteur tel que } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ &\quad \vec{a}(x+r, y) = \vec{a}(x, y), \ \vec{a}(x+w, y+u) = \vec{a}(x, y)\} \\ \mathcal{A}_m &= \{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A} \text{ tel que } \phi \in \mathcal{E}_{1,m} \text{ et } \vec{a} \in \mathcal{V}_m\} \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

où $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Dans la définition précédente $\mathcal{E}_{0,m}$ et \mathcal{V}_m sont des espaces de fonctions périodiques selon le réseau \mathcal{L} . On a aussi une écriture intrinsèque pour $\mathcal{E}_{1,m}$:

$$\phi \in \mathcal{E}_{1,m} \Leftrightarrow \forall v \in \mathcal{L}_m, \phi(x+v) = e^{i\pi \det(v,x)} \phi(x) \text{ avec } x = (x_1, x_2). \quad (2.5.6)$$

Définition 2.5.2 . On note τ l'application

$$\begin{cases} \tau : \mathcal{M} & \mapsto \mathcal{M} \\ (u, w) & \mapsto (u, w + \frac{1}{u}). \end{cases} \quad (2.5.7)$$

Les réseaux définis par les coordonnées (u, w) et $(u, w + r)$ sont identiques.

Définition 2.5.3 . On note σ_1 l'application

$$\begin{aligned} \sigma_1 : \mathcal{M} & \mapsto \mathcal{M} \\ (u, w) & \mapsto (u, -w). \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Définition 2.5.4 . On note

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{\sqrt{w^2 + u^2}}, \\ w' = \frac{wr}{\sqrt{w^2 + u^2}}, \\ (r' = \frac{1}{u'}) \end{cases} \quad (2.5.9)$$

et on définit σ_2 comme l'application

$$\begin{aligned} \sigma_2 : \mathcal{M} & \mapsto \mathcal{M} \\ (u, w) & \mapsto (u', w'). \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Les applications σ_1 et σ_2 sont involutives. Les trois applications τ , σ_1 et σ_2 sont bijectives.

Définition 2.5.5 . On appelle G le groupe de bijections de \mathcal{M} engendré par les applications τ , σ_1 et σ_2 .

Ce groupe est discret infini et est un sous groupe du groupe de Lie $PGL(2, \mathbb{R})$.

On définit maintenant deux applications linéaires orthogonales sur \mathbb{R}^2 associé aux σ_i :

$$\begin{cases} \Sigma_1 : \mathbb{R}^2 & \mapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x, -y) \end{cases} \quad (2.5.11)$$

l'application Σ_1 est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Oy . On définit aussi l'application

$$\begin{cases} \Sigma_2 : \mathbb{R}^2 & \mapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (\frac{1}{\sqrt{u^2 + w^2}}(wx + uy), \frac{1}{\sqrt{u^2 + w^2}}(ux - wy)) \end{cases} \quad (2.5.12)$$

qui est la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice des vecteurs $v_{1,m}$ et $v_{2,m}$.

Proposition 2.5.6 . *On a les relations*

$$\begin{cases} \Sigma_1(v_{1,m}) &= v_{1,\sigma_1(m)} \\ \Sigma_1(v_{2,m}) &= v_{2,\sigma_1(m)} \\ \Sigma_2(v_{1,m}) &= v_{2,\sigma_2(m)} \neq v_{1,\sigma_2(m)} \\ \Sigma_2(v_{2,m}) &= v_{1,\sigma_2(m)} \neq v_{2,\sigma_2(m)} \end{cases} \quad (2.5.13)$$

On a toujours

$$\Sigma_i(\mathcal{L}_m) = \mathcal{L}_{\sigma_i(m)}. \quad (2.5.14)$$

Preuve. Évident.

CQFD

On définit également une autre application

$$\begin{cases} S_m : \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (rx + wy, uy) \end{cases} \quad (2.5.15)$$

et on a l'égalité $S_m(\mathcal{L}_{(1,0)}) = \mathcal{L}_m$. Ce n'est pas une application orthogonale.

2.5.1 Transformations induites sur les fonctions

Si $m \in \mathcal{M}$ alors les réseaux correspondant à m et $\tau(m)$ sont identiques. Par conséquent, les espaces de fonctions associés sont aussi identiques. Nous allons donc nous limiter à l'étude des transformations correspondant à σ_1 et σ_2 .

Proposition 2.5.7 . *L'application*

$$\begin{cases} \Sigma_i^* : \mathcal{E}_{0,m} &\mapsto \mathcal{E}_{0,\sigma_i(m)} \\ f &\mapsto \frac{\mathcal{E}_{0,\sigma_i(m)}}{f(\Sigma_i(x, y))} \end{cases} \quad (2.5.16)$$

est un isomorphisme continu .

Preuve. Le fait que l'application soit bien à valeur dans $\mathcal{E}_{0,\sigma_i(m)}$ est évident vu l'équation (2.5.14).

La bijectivité provient de la relation $(\Sigma_i^*)^2 = Id$.

CQFD

Proposition 2.5.8 . *L'application*

$$\begin{cases} \Sigma_i^* : \mathcal{E}_{1,m} &\mapsto \mathcal{E}_{1,\sigma_i(m)} \\ \phi &\mapsto \frac{\mathcal{E}_{1,\sigma_i(m)}}{\phi(\Sigma_i(x, y))} \end{cases} \quad (2.5.17)$$

est un isomorphisme continu .

Preuve. Soit $\phi \in \mathcal{E}_{1,m}$. Les relations de périodicité pour ϕ de l'équation (2.4.31) peuvent s'écrire

$$\phi(x + v_i) = e^{i\pi \det(v_i, x)} \phi(x), \quad i = 1, 2 \quad (2.5.18)$$

avec $x = (x_1, x_2)$. Soit $i, j \in \{1, 2\}^2$; on a

$$\begin{aligned} (\Sigma_j^* \phi)(x + \Sigma_j v_i) &= \overline{\phi(\Sigma_j[x + \Sigma_j v_i])} \\ &= \overline{\phi(\Sigma_j x + \Sigma_j^2 v_i)} \\ &= \overline{\phi(\Sigma_j x + v_i)} \\ &= \overline{e^{i\pi \det(v_i, \Sigma_j x)} \phi(\Sigma_j x)} \\ &= \overline{e^{i\pi \det(\Sigma_j^2 v_i, \Sigma_j x)} \phi(\Sigma_j x)} \\ &= \overline{e^{i\pi \det(\Sigma_j) \det(\Sigma_j v_i, x)} \phi(\Sigma_j x)} \\ &= \overline{e^{i\pi(-1) \det(\Sigma_j v_i, x)} (\Sigma_j^* \phi)(x)} \\ &= e^{i\pi \det(\Sigma_j v_i, x)} (\Sigma_j^* \phi)(x). \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

Puisque $\Sigma_j(\mathcal{L}_m) = \mathcal{L}_{\sigma_j(m)}$, la section $\Sigma_j^* \phi$ appartient à $\mathcal{E}_{1, \sigma_j(m)}$. La bijectivité est évidente puisque $(\Sigma_i^*)^2 = Id$. **CQFD**

Proposition 2.5.9 . *L'application*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Sigma_i^* : \mathcal{V}_m & \mapsto \mathcal{V}_{\sigma_i(m)} \\ \overrightarrow{a} & \mapsto \Sigma_i \overrightarrow{a}(\Sigma_i(x, y)) \end{array} \right. \quad (2.5.20)$$

est un isomorphisme continu .

Preuve. Cette proposition est évidente. **CQFD**

Proposition 2.5.10 . *Les applications*

$$\left\{ \begin{array}{ll} S_m^* : \mathcal{E}_{i, (0,1)} & \mapsto \mathcal{E}_{i, m} \\ f & \mapsto \overline{f(S_m(x, y))} \end{array} \right. \quad \text{avec } i = 0, 1 \quad (2.5.21)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} S_m^* : \mathcal{V}_{(0,1)} & \mapsto \mathcal{V}_m \\ \overrightarrow{a} & \mapsto S_m \overrightarrow{a}(S_m(x, y)) \end{array} \right. \quad (2.5.22)$$

sont des isomorphismes continus.

Preuve. La démonstration suit celle des propositions précédentes. **CQFD**

Remarque 2.5.11 . *Ces applications sont bien connus en géométrie différentielle (cf [Na], p. 147).*

Remarque 2.5.12 . Si $f \in \mathcal{E}_{0,m}$ et $g = \Sigma_i^* f$ alors $\vec{\nabla} g = \Sigma_i^* \vec{\nabla} f$.

Proposition 2.5.13 . On a aussi les relations

$$\begin{cases} \Sigma_i \vec{A}_0(\Sigma_i(x, y)) = \vec{A}_0(x, y) \\ \forall \vec{a} \in \mathcal{V}_m \\ \text{rot } \Sigma_i^* \vec{a} = \Sigma_i^* \text{rot } \vec{a} \end{cases} \quad (2.5.23)$$

Preuve. On calcule simplement

$$\begin{cases} \Sigma_1^*(\text{rot } \vec{a}) &= \frac{\partial a_x}{\partial y}(x, -y) - \frac{\partial a_y}{\partial x}(x, -y) \\ &= \frac{\partial(\Sigma_1^* \vec{a})_x}{\partial y} - \frac{\partial(\Sigma_1^* \vec{a})_y}{\partial x} \\ &= \text{rot } \Sigma_1^* \vec{a}, \end{cases} \quad (2.5.24)$$

$$\begin{cases} \Sigma_2^* \text{rot } \vec{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial y}(x', y') - \frac{\partial a_y}{\partial x}(x', y') \\ &= u' \left[u \frac{\partial[a_x(x', y')]}{\partial x} - w \frac{\partial[a_x(x', y')]}{\partial y} \right] - u' \left[w \frac{\partial[a_y(x', y')]}{\partial x} + u \frac{\partial[a_y(x', y')]}{\partial y} \right] \\ &= \frac{\partial(\Sigma_2^* \vec{a})_x}{\partial y} - \frac{\partial(\Sigma_2^* \vec{a})_y}{\partial x} \\ &= \text{rot } \Sigma_2^* \vec{a}. \end{cases} \quad (2.5.25)$$

On remarquera que toutes les transformations définies dans cette section, σ_i , Σ_i et Σ_i^* sont involutives.

Remarque 2.5.14 . En fait ces opérations sont bien connues dans le cadre des courbes elliptiques (voir par exemple [Sie], Tome II, p. 114-119). Les différences portent sur deux points : La normalisation est faite pour que l'aire du domaine fondamental soit égale à 1 tandis que les calculs sur les courbes elliptiques supposent eux que l'un des vecteurs de réseau est de norme 1. La deuxième différence est que notre groupe G est plus grand que le groupe $PSL(2, \mathbb{Z})$ considéré par Siegel.

2.5.2 Invariance de la fonctionnelle

Théorème 2.5.15 . La fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ introduite en (2.4.32) est invariante par les transformations Σ_i^* autrement dit

$$F_{\lambda,k}(\Sigma_i^* \phi, \Sigma_i^* \vec{a}) = F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}). \quad (2.5.26)$$

Preuve. Par les calculs déjà fait

$$\Sigma_i^*[i \vec{\nabla} \phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi] = [i \vec{\nabla} \Sigma_i^* \phi + (\vec{A}_0 + \Sigma_i^* \vec{a})\Sigma_i^* \phi]. \quad (2.5.27)$$

Par conséquent, vu la définition de Σ_i^* et le fait que Σ_i est un endomorphisme orthogonal on a

$$\|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2(\Sigma_i(x, y)) = \|i\vec{\nabla}\Sigma_i^*\phi + (\vec{A}_0 + \Sigma_i^*\vec{a})\Sigma_i^*\phi\|^2(x, y). \quad (2.5.28)$$

On obtient de la même façon

$$\begin{cases} (\lambda - |\phi|^2)^2(\Sigma_i(x, y)) = (\lambda - |\Sigma_i^*\phi|^2)^2(x, y), \\ |\text{rot } \vec{a}|^2(\Sigma_i(x, y)) = |\text{rot } \Sigma_i^*\vec{a}|^2(x, y). \end{cases} \quad (2.5.29)$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} F_{\lambda, k}(\Sigma_i^*\phi, \Sigma_i^*\vec{a}) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2(\Sigma_i(x, y)) dx dy \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{4} (\lambda - |\phi|^2)^2(\Sigma_i(x, y)) + \frac{k^2}{2} |\text{rot } \vec{a}|^2(\Sigma_i(x, y)) dx dy \\ &= \int_{\Sigma_i\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \frac{1}{4} (\lambda - |\phi|^2)^2 \right. \\ &+ \left. \frac{k^2}{2} |\text{rot } \vec{a}|^2 \right\} |\det \Sigma_i| dx dy \\ &= F_{\lambda, k}(\phi, \vec{a}). \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

On a donc la conclusion.

CQFD

2.5.3 Conséquences

Définition 2.5.16 . On dit que le réseau de coordonnées $m_c = (1, 0)$ est le réseau carré.

On dit que le réseau de coordonnées $m_h = (\sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}})$ est le réseau hexagonal.

Voir le Tome III de [Sie], p. 159-172 où l'on parle des réseaux carré et hexagonal pour les formes automorphes.

Théorème 2.5.17 . Soit g une fonction définie sur \mathcal{M} de classe C^1 invariante par le groupe G . Les réseaux carré et hexagonal sont alors des points critiques pour g .

Preuve. On rappelle que σ_1 et σ_2 sont définis aux équations (2.5.8) et (2.5.10). Les coordonnées du réseau carré vérifient

$$\begin{aligned} \sigma_1(m_c) &= m_c, \\ \sigma_2(m_c) &= m_c. \end{aligned} \quad (2.5.31)$$

Le réseau hexagonal vérifie

$$\begin{aligned}\sigma_1(\tau(m_h)) &= m_h, \\ \sigma_2(m_h) &= m_h.\end{aligned}\tag{2.5.32}$$

La fonction g étant invariante par τ , σ_1 et σ_2 elle vérifie

$$\begin{cases} g(u, -w) = g(u, w) \\ g(u, w + \frac{1}{u}) = g(u, w) \\ g(\frac{1}{\sqrt{w^2+u^2}}, \frac{w}{u\sqrt{w^2+u^2}}) = g(u, w). \end{cases}\tag{2.5.33}$$

On différencie les relations (2.5.33) et on les évaluent sur le réseau carré

$$\begin{cases} -\frac{\partial g}{\partial w}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial w}(1, 0), \\ -\frac{\partial g}{\partial u}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial u}(1, 0). \end{cases}\tag{2.5.34}$$

Cela entraîne l'annulation des dérivées partielles en $(1, 0)$. Le réseau carré est donc un point critique pour la fonction g .

On différencie les relations (2.5.33) et on les évaluent sur le réseau hexagonal qui correspond à $m_h = (u_h, w_h) = (\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{4}{3}})$

$$\begin{cases} -\frac{\partial g}{\partial w}(u_h, w_h) = \frac{\partial g}{\partial w}(u_h, w_h), \\ \frac{\partial g}{\partial w}(u_h, w_h) = -w_h u_h^3 \frac{\partial g}{\partial u}(u_h, w_h) + u_h^4 \frac{\partial g}{\partial w}(u_h, w_h). \end{cases}\tag{2.5.35}$$

Les équations (2.5.35) entraînent la nullité des dérivées partielles pour les coordonnées (u_h, w_h) . Ce point est donc critique pour g . **CQFD**

Théorème 2.5.18 . Soit $m \in \mathcal{M}$. Il existe un élément $g \in G$ tel que $g(m) = (u, w)$ vérifie les conditions

$$\begin{aligned}0 &\leq w \leq \frac{r}{2}, \\ r &\leq \sqrt{w^2 + u^2}.\end{aligned}\tag{2.5.36}$$

Ces relations impliquent l'inégalité $r \leq \sqrt[4]{\frac{4}{3}}$.

On peut lire le Tome III de [Sie] pour des calculs similaires sur le groupe modulaire.

Preuve. Soit donc (u, w) un point du réseau. Modulo la transformations τ on peut supposer que $|w| \leq \frac{r}{2}$.

En utilisant σ_2 on peut se placer systématiquement dans le cas où $\|v_2\| \leq \|v_1\|$. On a alors

$$\begin{cases} r^2 & \geq w^2 + \frac{1}{r^2} \\ & \geq \frac{r^2}{4} + \frac{1}{r^2}. \end{cases} \quad (2.5.37)$$

Cela entraîne donc $\frac{3}{4}r^2 \geq \frac{1}{r^2}$.

Ceci s'écrit plus simplement sous la forme $r \leq \sqrt[4]{\frac{4}{3}}$.

Ensuite une application éventuelle de σ_1 permet d'obtenir $w \geq 0$. **CQFD**

Remarque 2.5.19 . *Puisque l'expérience physique fait apparaître un système de cellules hexagonales, on devrait pouvoir montrer que les énergies minimales sont atteintes par des réseaux hexagonaux.*

Nous n'avons pas pu montrer ceci même si nous avons des résultats partiels comme la proposition 4.2.3. Il existe d'autres études locale des énergies des solutions bifurqués, par exemple [Al1].

Dans la suite de la thèse, on utilisera assez rarement la géométrie du réseau, par conséquent on n'indiquera pas (u, w) quand ce n'est pas utile. On voit également que l'espace des réseaux quotienté par τ , σ_i est un espace localement compact non compact, la suite $(u_n, w_n) = (\frac{1}{n}, 0)$ ne convergeant vers aucun réseau (géométriquement on peut voir ce réseau comme un rectangle qui s'allonge de plus en plus et se rétrécit de plus en plus en gardant son aire constante).

Chapitre 3

Étude de la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$

Dans ce chapitre nous étudions la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ définie à l'équation (2.4.32) ; nous montrons l'existence de solutions minimisantes ainsi que leur régularité.

Nous étudions comment évoluent les minima m_F et m_D selon λ et k .

A la fin du chapitre nous décrivons complètement la situation si $\lambda \leq 2\pi$ et $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.1 Quelques opérateurs différentiels linéaires

On rappelle que l'on note \mathcal{L} le réseau engendré par les deux vecteurs

$$\begin{cases} v_1 &= (r, 0) \\ v_2 &= (w, u). \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Comme à la section 2.4, la quantification est choisie égale à 1 ; avec nos notations (voir la sous section 2.4.2), cela s'écrit $ru = 1$.

On définit au dessus du tore \mathbb{R}^2/\mathcal{L} l'espace fonctionnel suivant :

$$L^2_{\text{div},0}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2) = \left\{ \vec{a} : \mathbb{R}^2/\mathcal{L} \mapsto \mathbb{R}^2, \vec{a} \in L^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}), \right. \\ \left. \text{div } \vec{a} = 0 \text{ et } \int_{\Omega} \vec{a} = 0 \right\} \quad (3.1.2)$$

où $\text{div } \vec{a} = 0$ est une équation au sens des distributions.

On note $C^\infty(E_1)$ l'espace des sections C^∞ du fibré E_1 défini au théorème 2.3.6. On note aussi $C^\infty_{\text{div},0}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2)$ le sous espace de $L^2_{\text{div},0}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2)$ formé des potentiels vecteurs C^∞ de divergence nulle et de

moyenne nulle sur Ω . On définit de manière similaire les espaces H^r . Dans cette section, on étudie l'opérateur H défini sur les sections C^∞ de E_1 par :

$$\begin{aligned} H : C^\infty(E_1) &\longrightarrow C^\infty(E_1) \\ \phi &\longmapsto [i\vec{\nabla} + \vec{A}_0]^*[i\vec{\nabla} + \vec{A}_0]\phi \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

et l'opérateur L défini sur l'espace $C_{\text{div},0}^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L};\mathbb{R}^2)$ par :

$$\begin{aligned} L : C_{\text{div},0}^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L};\mathbb{R}^2) &\longrightarrow C_{\text{div},0}^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L};\mathbb{R}^2) \\ \vec{a} &\longmapsto \text{rot}^* \text{rot } \vec{a}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Le deuxième opérateur est effectivement bien défini sur $C_{\text{div},0}^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L};\mathbb{R}^2)$; Le potentiel $L\vec{a}$ est de moyenne nulle car L est un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients constants. $L\vec{a}$ est de divergence nulle car l'opérateur de divergence commute avec $\text{rot}^* \text{rot}$.

On déterminera ici le spectre d'extensions autoadjointes convenables (notées aussi H et L) de ces opérateurs.

3.1.1 L'opérateur de Schrödinger magnétique, H

Dans cette section, on rappelle le calcul du spectre de l'opérateur H en utilisant la méthode de l'article [BGT].

On rappelle que

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}), \\ \partial_z = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}). \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Notons

$$\begin{cases} L_+ = \partial_{\bar{z}} + \frac{\pi}{2}z = \frac{-i}{2}[i\frac{\partial}{\partial x} - \pi y] + \frac{1}{2}[i\frac{\partial}{\partial y} + \pi x] \\ \text{et } L_- = \partial_z - \frac{\pi}{2}\bar{z} = \frac{-i}{2}[i\frac{\partial}{\partial x} - \pi y] - \frac{1}{2}[i\frac{\partial}{\partial y} + \pi x]. \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Ce sont des opérateurs elliptiques d'ordre 1. On vérifie facilement que L_\pm envoient $H^r(E_1)$ dans $H^{r-1}(E_1)$, pour tout r .

Quelques calculs permettent de prouver les formules suivantes

$$\begin{cases} [L_-, L_+] = \pi, \\ H = -4L_-L_+ + 2\pi, \\ L_- = -(L_+)^*. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Théorème 3.1.1 . *Le spectre de l'extension autoadjointe de H est de la forme $\lambda_n = 2\pi + 4\pi n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Les valeurs propres λ_n sont simples de vecteur propre associé $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi^n n!}}(L_-)^n \phi_0$ où ϕ_0 vérifie $L_+ \phi_0 = 0$.*

Preuve. L'opérateur H est symétrique sur l'espace des sections C^∞ de E_1 . C'est un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2 sur le tore \mathbb{R}^2/\mathcal{L} qui est une variété compacte. Donc l'opérateur H est essentiellement autoadjoint à partir de $C^\infty(E_1)$ et le domaine de son extension autoadjointe est $\mathcal{D}(H) = H^2(E_1)$ (voir par exemple [LM], théorème III.5.8). De plus, l'injection de $H^2(E_1)$ dans $L^2(E_1)$ étant compacte, son spectre est discret.

Puisque H est un opérateur différentiel elliptique, ses fonctions propres sont C^∞ . Par ailleurs l'opérateur H est positif puisque

$$\langle H\phi, \phi \rangle = \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}_0\phi\|^2 \geq 0 \quad (3.1.8)$$

si ϕ est C^∞ ; cette propriété s'étend à $\mathcal{D}(H)$ par continuité et densité.

Soit $\phi \in C^\infty(E_1)$ une fonction de norme 1. On peut donc effectuer le petit calcul suivant

$$\begin{aligned} \langle H\phi, \phi \rangle &= -4\langle L_- L_+ \phi, \phi \rangle + 2\pi \|\phi\|_{L^2}^2 \\ &= 4\|L_+ \phi\|_{L^2(E_1)}^2 + 2\pi \|\phi\|_{L^2}^2 \\ &\geq 2\pi \|\phi\|_{L^2}^2 = 2\pi. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Lemme 3.1.2 . *Le noyau de L_+ est de dimension 1.*

Remarque 3.1.3 . *Plus généralement, en quantification d avec $d > 0$, la dimension de $\text{Ker } L_+$ est d .*

Remarque 3.1.4 . *Certains auteurs ([La], repris par [Od2]) laissent parfois entendre que la multiplicité de la plus petite valeur propre dépend de la nature de \mathcal{L} . C'est sans doute du au fait qu'ils ne précisaient pas sur quel fibré ils travaillent.*

Soit ϕ_0 dans le noyau de L_+ . Le vecteur ϕ_0 vérifie $L_+ \phi_0 = 0$.

Posons $\phi_0 = e^{-(x^2+y^2)\frac{\pi}{2}}g$. La condition $L_+ \phi_0 = 0$ équivaut aux relations de Cauchy-Riemann pour g . La fonction g est donc holomorphe.

Sur le plan complexe, les relations de périodicité s'écrivent, en notant :

$t_1 = r = \frac{1}{u}$ et $t_2 = w + iu$,

$$\phi_0(z + t_i) = \exp\left[\frac{\pi}{2}(\overline{t_i}z - t_i\overline{z})\right]\phi_0(z) \quad (3.1.10)$$

et

$$g(z + t_i) = \exp\left(\frac{\pi}{2} \overline{t_i}(t_i + 2z)\right)g(z). \quad (3.1.11)$$

On pose

$$\begin{cases} g(z) = \exp\left(\frac{\pi}{2} z^2\right)u\left(\frac{z}{r}\right), \\ t_s = \frac{w+iu}{r} = wu + iu^2 \end{cases} \quad (3.1.12)$$

et on obtient

$$\begin{cases} u(z + 1) = u(z) \\ u(z + t_s) = \exp(-2\pi i[z + \frac{t_s}{2}])u(z). \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Il existe une fonction holomorphe unique h définie sur \mathbb{C}^* définie par $u(z) = h(e^{2\pi iz})$. La fonction h étant holomorphe sur \mathbb{C}^* on peut faire un développement en série de Laurent

$$\begin{cases} h(v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n v^n \\ u(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n z}. \end{cases} \quad (3.1.14)$$

La deuxième condition de l'équation (3.1.13) sur u est équivalente à l'équation

$$a_n e^{2\pi i n t_s} = a_{n+1} e^{-\pi i t_s} \quad (3.1.15)$$

qui se résout et donne la forme suivante pour u

$$u(z) = C \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i t_s n^2 + 2\pi i n z}. \quad (3.1.16)$$

Cette série converge dans $H^2(E_1)$.

On peut déterminer la constante C à une phase près en imposant la condition $\|\phi_0\|_{L^2} = 1$. **CQFD**

Les solutions de l'équation $H\phi = 2\pi\phi$ correspondent par les calculs (3.1.9) et (3.1.7) aux solutions de $L_+\phi = 0$. Ces solutions forment un espace vectoriel de dimension 1; donc on a bien prouvé que la dégénérescence du niveau fondamental est égale à 1.

Si ϕ est un vecteur propre non trivial pour H de valeur propre λ alors $L_-\phi$ est vecteur propre non trivial de H de valeur propre $\lambda + 4\pi$ (ceci peut-être démontré en utilisant les propriétés (3.1.7) qui sont celles d'un oscillateur harmonique).

Par contre $L_+\phi$ n'est un vecteur propre non trivial de H de valeur propre $\lambda - 4\pi$ que si $\lambda \neq 2\pi$.

Le théorème spectral affirme que $L^2(E_1)$ est somme hilbertienne des espaces propres de H . Le calcul précédent montre que $L_-^n \phi_0$ est vecteur propre de l'opérateur H de valeur propre $2\pi + 4\pi n$, donc que l'ensemble $2\pi + 4\pi\mathbb{N}$ est inclus dans le spectre de H .

En appliquant l'opérateur L_+ on peut prouver l'inclusion inverse. Le théorème est prouvé. **CQFD**

Théorème 3.1.5 . *Si $\lambda > 2\pi$, les couples minimisants la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ sont différents du couple $(0,0)$.*

Preuve. Soit la courbe formée des couples $(t\phi_0, 0)_{t \in \mathbb{R}}$; alors

$$\frac{d}{dt} F_{\lambda,k}(t\phi_0, 0)(t=0) = 0. \quad (3.1.17)$$

Il faut donc calculer à l'ordre 2 pour obtenir le résultat

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} F_{\lambda,k}(t\phi_0, 0)(t=0) &= \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla} \phi_0 + \vec{A}_0 \phi_0\|^2 - \lambda |\phi_0|^2 \\ &= \langle H \phi_0, \phi_0 \rangle - \lambda \langle \phi_0, \phi_0 \rangle \\ &= 2\pi - \lambda < 0. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Le Hessien de la fonctionnelle en $(0,0)$ possède donc une valeur propre strictement négative, il est donc impossible que ce soit un minimum. **CQFD**

Proposition 3.1.6 . *La section ϕ_0 possède un unique zéro dans la variété \mathbb{R}^2/\mathcal{L} .*

Preuve. La fonction ϕ_0 a pour expression $\phi_0(x, y) = e^{-(x^2+y^2)\frac{\pi}{2}} g(x+iy)$ où g est holomorphe.

L'ensemble des zéros de ϕ_0 est égal à l'ensemble des zéros de g . Or cet ensemble est discret car g est holomorphe et non identiquement nulle. Donc il existe $z_s \in \mathbb{C}$ tel que le parallélogramme \mathcal{P} de sommets

$$z_s, \quad z_s + r, \quad z_s + r + (w + iu) \text{ et } z_s + (w + iu) \quad (3.1.19)$$

ne rencontre aucun zéro de la fonction g .

Le nombre de zéros de la fonction g situé à l'intérieur du parallélogramme \mathcal{P} est fini et est donné par le théorème de Rouché-Fontené sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{P}} \frac{g'(z)}{g(z)} dz. \quad (3.1.20)$$

En utilisant l'équation (3.1.11), on obtient si $t \in \mathcal{L}$

$$\frac{g'(z+t)}{g(z+t)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \pi \bar{t} \quad (3.1.21)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \frac{g'(z)}{g(z)} dz &= \int_0^1 \frac{g'(z_s+rh)}{g(z_s+rh)} r dh - \int_0^1 \frac{g'(z_s+(w+iu)+rh)}{g(z_s+(w+iu)+rh)} r dh \\ &+ \int_0^1 \frac{g'(z_s+r+(w+iu)h)}{g(z_s+r+(w+iu)h)} (w+iu) dh - \int_0^1 \frac{g'(z_s+(w+iu)h)}{g(z_s+(w+iu)h)} (w+iu) dh \\ &= \int_0^1 \left[\frac{g'(z_s+rh)}{g(z_s+rh)} - \frac{g'(z_s+(w+iu)+rh)}{g(z_s+(w+iu)+rh)} \right] r dh \\ &+ \int_0^1 \left[\frac{g'(z_s+r+(w+iu)h)}{g(z_s+r+(w+iu)h)} - \frac{g'(z_s+(w+iu)h)}{g(z_s+(w+iu)h)} \right] (w+iu) dh \\ &= \int_0^1 [-\pi \overline{w+iu}] r dh + \int_0^1 [\pi \bar{r}] (w+iu) dh \\ &= -\pi (w-iu)r + \pi r(w+iu) \\ &= -\pi wr + i\pi + \pi rw + i\pi \\ &= 2i\pi. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Par conséquent, l'intégrale (3.1.20) est égale à 1. On a bien un unique zéro pour la fonction g dans le parallélogramme \mathcal{P} . Donc en passant au quotient, la section ϕ_0 a un unique zéro sur \mathbb{R}^2/\mathcal{L} . **CQFD**

Remarque 3.1.7 Dans le preprint [Tak] il est montré que les solutions bifurquées définies dans le chapitre IV ont un seul zéro. Il est aussi montré que ce zéro est dans le cas d'un réseau triangulaire ou carré situé à un endroit que l'on peut expliciter de \mathbb{R}^2/\mathcal{L} .

Dans l'article [EMQ] il est montré que les zéros de ϕ sont isolés dans le cas d'un ouvert simplement connexe de \mathbb{R}^2 .

3.1.2 L'opérateur L

L'opérateur L défini à l'équation (3.1.4) a pour expression

$$L \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.1.23)$$

On vérifie facilement que l'opérateur L envoie l'espace $C_{\text{div},0}^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2)$ dans lui même.

L'espace $L_{\text{div},0}^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2)$ est l'espace des potentiels vecteurs \mathcal{L} -périodiques sur \mathbb{R}^2 localement intégrable d'intégrale nulle sur Ω et de divergence distributionnelle nulle. On définit de la même façon $H_{\text{div},0}^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2)$.

Proposition 3.1.8 . *L'extension autoadjointe de l'opérateur L a pour domaine $H_{\text{div},0}^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2)$. Son spectre est discret et on a l'égalité*

$$sp(L) = \{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \exists(n_1, n_2) \neq (0, 0), \lambda = (2\pi)^2[(n_2u)^2 + (n_1r + n_2w)^2]\}. \quad (3.1.24)$$

L'opérateur L est inversible.

Preuve. L'opérateur L opère sur l'espace des champs de vecteurs de divergence nulle, on peut donc l'écrire sous la forme

$$L \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta a_x \\ -\Delta a_y \end{pmatrix}. \quad (3.1.25)$$

L'opérateur différentiel L est symétrique sur l'espace $C_{\text{div},0}^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2)$. Le tore \mathbb{R}^2/\mathcal{L} est compact sans bord et l'opérateur L est elliptique donc il est essentiellement autoadjoint (voir par exemple [LM], théorème III.5.8) et son extension autoadjointe a pour domaine $\mathcal{D}(L) = H_{\text{div},0}^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2)$.

L'opérateur $-\Delta$ est autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{C})$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{C})$. Il est diagonalisé par les fonctions propres $e_{n_1, n_2}(x, y) = e^{2\pi i[xn_2u + y(n_1r + n_2w)]}$ de valeur propres $(2\pi)^2[(n_2u)^2 + (n_1r + n_2w)^2]$.

Par la formule (3.1.25) L'opérateur L est la restriction de l'opérateur $(-\Delta, -\Delta)$ à l'espace $H_{\text{div},0}^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2)$:

$$(f, g) \mapsto (-\Delta f, -\Delta g). \quad (3.1.26)$$

Si $(n_1, n_2) = (0, 0)$ on prend pour base orthonormée de \mathbb{R}^2 $\vec{A}_{n_1, n_2} = (1, 0)$ et $\vec{B}_{n_1, n_2} = (1, 0)$. Si $(n_1, n_2) \neq (0, 0)$ on prend pour base orthonormée de \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \vec{A}_{n_1, n_2} &= \frac{1}{\sqrt{(n_2w + n_1r)^2 + (n_2u)^2}} \begin{pmatrix} n_2w + n_1r \\ -n_2u \end{pmatrix} \text{ et} \\ \vec{B}_{n_1, n_2} &= \frac{1}{\sqrt{(n_2w + n_1r)^2 + (n_2u)^2}} \begin{pmatrix} n_2u \\ n_2w + n_1r \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Les champs de vecteurs $\vec{A}_{n_1, n_2}e_{n_1, n_2}(x, y)$ et $\vec{B}_{n_1, n_2}e_{n_1, n_2}(x, y)$ forment donc une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{C}) \times L^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{C})$.

Tout champ de vecteur \vec{V} de $L^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{C}) \times L^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{C})$ peut s'écrire sous la forme

$$\vec{V} = \sum_{n_1, n_2} \alpha_{n_1, n_2} \vec{A}_{n_1, n_2}e_{n_1, n_2} + \beta_{n_1, n_2} \vec{B}_{n_1, n_2}e_{n_1, n_2}. \quad (3.1.28)$$

Maintenant, si le champ de vecteur \vec{V} appartient à $L^2_{\text{div},0}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2)$, on a en plus les conditions

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \vec{V} = 0, \\ \text{div } \vec{V} = 0, \\ \vec{V} \text{ champ de vecteur réel.} \end{cases} \quad (3.1.29)$$

La première condition nous donne $\alpha_{0,0} = \beta_{0,0} = 0$.

Si le champ \vec{V} appartient à H^1 , alors on peut calculer sa divergence :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{V} &= \sum_{n_1, n_2} \frac{\alpha_{n_1, n_2} [2\pi i n_2 u (n_2 w + n_1 r) + 2\pi i (n_1 r + n_2 w) (-n_2 u)]}{\sqrt{(n_2 w + n_1 r)^2 + (n_2 u)^2}} e_{n_1, n_2} \\ &+ \sum_{n_1, n_2} \frac{\beta_{n_1, n_2} [2\pi i n_2 u (n_2 u) + 2\pi i (n_1 r + n_2 w) (n_2 w + n_1 r)]}{\sqrt{(n_2 w + n_1 r)^2 + (n_2 u)^2}} e_{n_1, n_2} \\ &= \sum_{n_1, n_2} 2\pi i \beta_{n_1, n_2} \sqrt{(n_2 w + n_1 r)^2 + (n_2 u)^2} e_{n_1, n_2} \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

Par conséquent, si $\text{div } \vec{V} = 0$, alors $\beta_{n_1, n_2} = 0$ si $(n_1, n_2) \neq (0, 0)$.

Le champ de vecteur \vec{V} étant réel, cela nous donne $\overline{\alpha_{n_1, n_2}} = \alpha_{-n_1, -n_2}$.

Cela montre que les fonctions

$$\begin{cases} \vec{b}_{n_1, n_2}(x, y) = \sqrt{2} \vec{A}_{n_1, n_2} \cos(2\pi [x n_2 u + y (n_1 r + n_2 w)]) \\ \vec{c}_{n_1, n_2}(x, y) = \sqrt{2} \vec{A}_{n_1, n_2} \sin(2\pi [x n_2 u + y (n_1 r + n_2 w)]) \end{cases} \quad (3.1.31)$$

forment une base hilbertienne de $L^2_{\text{div},0}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2)$ avec $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - (0, 0)$.

Par ailleurs les fonctions \vec{b}_{n_1, n_2} et \vec{c}_{n_1, n_2} sont fonctions propres de \mathcal{L} de valeur propre $(2\pi)^2 [(n_2 u)^2 + (n_1 r + n_2 w)^2]$.

Cette valeur propre est donc au moins double. La multiplicité de cette valeur propre peut être plus grande que 2 car $(n_2 u)^2 + (n_1 r + n_2 w)^2$ peut à priori être atteint par différents couples (n_1, n_2) .

Le réel 0 n'est pas dans le spectre de L ; par conséquent le spectre étant discret l'opérateur L est inversible.

Les valeurs propres de L peuvent se réécrire $(2\pi)^2 \|n_1 v_1 + n_2 v_2\|^2$. Si $w \geq 0$ et $\|v_2\| \geq \|v_1\|$ alors le minimum de $(2\pi)^2 [(n_2 u)^2 + (n_1 r + n_2 w)^2]$ avec $(n_1, n_2) \neq (0, 0)$ est égal à $(2\pi r)^2$.

Pour les réseaux carré et hexagonal, cela nous donne :

$$\begin{cases} \text{modèle carré :} & r = 1 \text{ et } w = 0 & \lambda_{\min}^{\text{car}} = (2\pi)^2; \\ \text{modèle hexagonal :} & r = (\frac{4}{3})^{1/4} \text{ et } w = \frac{r}{2} & \lambda_{\min}^h = (2\pi)^2 \sqrt{\frac{4}{3}}. \end{cases} \quad (3.1.32)$$

CQFD

Lemme 3.1.9 . Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que, pour toute fonction $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ avec $\int_{\Omega} f_0 = 0$, il existe une unique solution $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ des équations

$$-\Delta u_0 = f_0 \text{ et } \int_{\Omega} u_0 = 0. \quad (3.1.33)$$

Cette solution vérifie :

$$\|u_0\|_{L^\infty} \leq c_0 \|f_0\|_{L^2}. \quad (3.1.34)$$

Preuve. L'application

$$\begin{aligned} -\Delta : C_0^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}) &\mapsto C_0^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto -\Delta f \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

où $C_0^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions C^∞ , \mathcal{L} -périodique d'intégrale nulle sur Ω est symétrique. Le tore \mathbb{R}^2/\mathcal{L} est compact sans bord et l'opérateur $-\Delta$ est elliptique donc il est essentiellement autoadjoint (voir par exemple [LM], théorème III.5.8) et son extension autoadjointe encore noté $-\Delta$ a pour domaine $\mathcal{D}(-\Delta) = H_0^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R})$.

L'injection $H_0^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}) \hookrightarrow L_0^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ nous indique que la fonction $(-\Delta + i)^{-1}$ est compacte donc de spectre discret. L'opérateur $-\Delta$ possède donc un spectre discret.

L'égalité

$$\forall f \in H_0^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}), \langle -\Delta f, f \rangle = \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} f\|^2 \quad (3.1.36)$$

nous indique que le noyau de $-\Delta$ est constitué de fonctions constantes. Or notre opérateur est défini sur des fonctions de moyenne nulle, le noyau est donc nul. L'opérateur $-\Delta$ est inversible.

L'estimée L^∞ provient de l'injection de sobolev $H^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ (voir théorème 2.2.3). **CQFD**

Proposition 3.1.10 . Soit $\vec{a} \in H^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2)$ un potentiel vecteur de divergence nulle et d'intégrale nulle sur Ω . Si $\text{rot } \vec{a} = 0$ alors $\vec{a} = 0$

Preuve. Le domaine de l'opérateur L est $H_{\text{div},0}^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2)$. La forme quadratique associée est

$$\begin{cases} q_L : H_{\text{div},0}^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2) &\mapsto \mathbb{R} \\ \vec{a} &\mapsto \langle L \vec{a}, \vec{a} \rangle = \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2 \end{cases} \quad (3.1.37)$$

et elle est définie positive. Puisque le spectre de L est inclus dans $[c, \infty[$ avec $c > 0$, la forme quadratique q_L est définie positive. Si le champ de vecteur \vec{a} est comme dans l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} q_L(\vec{a}) &= \langle L\vec{a}, \vec{a} \rangle \\ &= \langle 0, \vec{a} \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.38}$$

On a donc $\vec{a} = 0$.

CQFD

3.2 Existence de solutions minimisantes pour la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$.

Dans cette section, on montre que la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ atteint son minimum. Ces résultats sont évoqués dans l'article [Chap] qui contient une démonstration incomplète. Ces points sont détaillés ici pour la commodité du lecteur. La fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ a été définie à l'équation (2.4.32) et pour $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ par

$$F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\lambda - |\phi|^2)^2 + \frac{k^2}{2} \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2. \tag{3.2.1}$$

On montre maintenant que la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ est coercive sur \mathcal{A} et que le minimum est atteint sur \mathcal{A} .

Lemme 3.2.1 . *Pour tout E dans \mathbb{R} , il existe $C = C(E)$ tel que, $\forall (\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ vérifiant $F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) < E$, on ait*

$$\|\vec{a}\|_{H^1} + \|\phi\|_{H^1(E_1)} < C(E). \tag{3.2.2}$$

Preuve. L'estimée sur le potentiel \vec{a} s'obtient facilement. On observe en effet que :

$$\int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2 \leq \frac{2}{k^2} F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}). \tag{3.2.3}$$

Maintenant, la norme L^2 de $\text{rot } \vec{a}$ s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2 &= \langle \text{rot}^* \text{rot } \vec{a}, \vec{a} \rangle \\ &= \langle -\Delta \vec{a}, \vec{a} \rangle. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

On a utilisé le fait que $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ à la fin du calcul (3.2.4). On sait aussi que $\int_{\Omega} \vec{a} = 0$. L'étape 3 du théorème 2.3.2 permet de prouver qu'il existe des constantes C, C' telle que

$$C \|\vec{a}\|_{H^1}^2 \leq \langle -\Delta \vec{a}, \vec{a} \rangle \leq C' \|\vec{a}\|_{H^1}^2. \quad (3.2.5)$$

Donc il existe une constante C telle que

$$\|\vec{a}\|_{H^1} \leq C \sqrt{F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a})}. \quad (3.2.6)$$

La première partie du lemme est prouvée.

On utilise ensuite le théorème 2.2.3 pour obtenir une estimée L^4 sur \vec{a} et donc sur $\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{a}$.

On obtient une estimée L^4 sur ϕ facilement, en écrivant

$$\int_{\Omega} |\phi|^4 dx dy \leq \int_{\Omega} [2\lambda^2 + 2(\lambda - |\phi|^2)^2] dx dy \leq 2\lambda^2 + 8F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}). \quad (3.2.7)$$

Maintenant il faut une estimée pour $\|\phi\|_{H^1}$. Pour cela on développe l'énergie magnétique

$$\int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi\|^2 dx dy \leq 2 \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}\phi\|^2 dx dy + 2 \int_{\Omega} \vec{A}^2 |\phi|^2 dx dy. \quad (3.2.8)$$

On majore le dernier terme en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\int_{\Omega} \vec{A}^2 |\phi|^2 dx dy \leq \|\vec{A}\|_{L^4}^2 \|\phi\|_{L^4}^2. \quad (3.2.9)$$

Donc la norme L^2 de $\vec{\nabla}\phi$ est contrôlée grâce à (3.2.6) et (3.2.7).

La norme L^4 de ϕ est contrôlée ; il en est de même de sa norme L^2 . La norme H^1 de ϕ est donc contrôlée. **CQFD**

Lemme 3.2.2 . Si $f_n \rightharpoonup f$ dans L^2 et si $g_n \rightarrow g$ dans L^2 alors $f_n g_n \rightarrow f g$ dans L^1 .

Preuve. On écrit simplement la différence

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_n g_n - f g| dx dy &\leq \int_{\Omega} |f_n| \times |g_n - g| dx dy + \int_{\Omega} (f_n - f) g dx dy \\ &\leq \|f_n\|_{L^2} \|g_n - g\|_{L^2} + \int_{\Omega} (f_n - f) g dx dy \\ &\leq \sup_n \|f_n\|_{L^2} \|g_n - g\|_{L^2} + \int_{\Omega} (f_n - f) g dx dy. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

On a $\sup_n \|f_n\|_{L^2} < \infty$ car une suite faiblement convergente est bornée (cf [Br], III.5(iii)).

Combiné avec le fait que g_n tend vers g dans L^2 , cela implique que le terme $\int_{\Omega} f_n(g_n - g) dx dy$ tend vers 0.

Le terme $\int_{\Omega} (f_n - f)g dx dy$ tend vers 0, en vertu de la convergence faible de f_n vers f . **CQFD**

Lemme 3.2.3 . *La fonctionnelle $F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a})$ est semicontinue inférieurement pour la topologie de la convergence faible sur V .*

Preuve. Soit (ϕ_n, \vec{a}_n) dans \mathcal{A} convergeant faiblement vers (ϕ, \vec{a}) dans \mathcal{A} . Il faut estimer la limite supérieure de la quantité suivante

$$\begin{aligned} F_{\lambda,k}(\phi_n, \vec{a}_n) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|i \vec{\nabla} \phi_n\|^2 + \int_{\Omega} \operatorname{Re} i \vec{\nabla} \phi_n \overline{\phi_n} (\vec{A}_0 + \vec{a}_n) \phi_n \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\vec{A}_0 + \vec{a}_n)^2 |\phi_n|^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\lambda - |\phi_n|^2)^2 + \frac{k^2}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_n|^2. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Pour la topologie faible de H^1 , on a

$$\begin{cases} \phi_n \rightharpoonup \phi, \\ \vec{a}_n \rightharpoonup \vec{a}. \end{cases} \quad (3.2.12)$$

Grâce au théorème 2.2.3, on a, pour tout $p \in [1, \infty[$, la convergence forte suivante :

$$\begin{cases} \phi_n \rightarrow \phi & \text{dans } L^p, \\ \vec{a}_n \rightarrow \vec{a} & \text{dans } L^p. \end{cases} \quad (3.2.13)$$

Cela entraîne donc trivialement

$$\int_{\Omega} (\lambda - |\phi_n|^2)^2 dx dy \rightarrow \int_{\Omega} (\lambda - |\phi|^2)^2 dx dy. \quad (3.2.14)$$

La convergence forte (3.2.13) combinée au lemme 3.2.2 entraîne aussi la convergence du terme suivant

$$\int_{\Omega} (\vec{A}_0 + \vec{a}_n)^2 |\phi_n|^2 \rightarrow \int_{\Omega} (\vec{A}_0 + \vec{a})^2 |\phi|^2. \quad (3.2.15)$$

La propriété (3.2.12) entraîne, pour la topologie faible de L^2

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \phi_n \rightharpoonup \vec{\nabla} \phi, \\ \operatorname{rot} \vec{a}_n \rightharpoonup \operatorname{rot} \vec{a}. \end{cases} \quad (3.2.16)$$

La norme $\|\cdot\|_{L^2} : L^2 \mapsto \mathbb{R}$ est semicontinue inférieurement pour la topologie de la convergence faible sur L^2 (cf [Br]). Donc on obtient la semicontinuité de certains termes de la fonctionnelle

$$\begin{cases} \|i\vec{\nabla}\phi\|_{L^2} \leq \underline{\lim}_n \|i\vec{\nabla}\phi_n\|_{L^2}, \\ \|\operatorname{rot} \vec{a}\|_{L^2} \leq \underline{\lim}_n \|\operatorname{rot} \vec{a}_n\|_{L^2}. \end{cases} \quad (3.2.17)$$

On doit prouver une continuité forte sur le terme $\int_{\Omega} 2 \operatorname{Re}[\bar{\phi}(\vec{A}_0 + \vec{a}).i\vec{\nabla}\phi]$ pour ensuite obtenir une semicontinuité de la fonctionnelle.

Les sections \vec{a}_n (respectivement ϕ_n) convergent dans L^4 vers \vec{a} (respectivement ϕ). Donc le produit $\phi_n \vec{a}_n$ converge vers $\phi \vec{a}$ dans L^2 en vertu de l'inégalité de Hölder.

L'application du lemme 3.2.2 avec $f_n = \phi_n(\vec{A}_0 + \vec{a}_n)$ et $g_n = \vec{\nabla}\phi_n$ entraîne la convergence de la suite $\int_{\Omega} 2 \operatorname{Re}[\bar{\phi}_n(\vec{A}_0 + \vec{a}_n).i\vec{\nabla}\phi_n]$. **CQFD**

Théorème 3.2.4 . *La fonctionnelle $F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a})$ atteint son minimum sur \mathcal{A} .*

Preuve. Soit $F_{\min} = \inf_{(\phi, \vec{a})} F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a})$ l'infimum de la fonctionnelle sur l'espace \mathcal{A} . Cet infimum existe car la fonctionnelle est positive. Par définition, il existe une suite de $(\phi_{\nu}, \vec{a}_{\nu}) \in \mathcal{A}$ telle que

$$F_{\min} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_{\lambda,k}(\phi_{\nu}, \vec{a}_{\nu}). \quad (3.2.18)$$

Le lemme 3.2.1 nous dit que cette suite est bornée dans \mathcal{A} . Il existe donc $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ qui soit valeur d'adhérence de la suite $(\phi_{\nu}, \vec{a}_{\nu})$ pour la topologie faible de \mathcal{A} . Puisque la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ est semicontinue inférieurement pour la topologie de la convergence faible, $F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) \leq \underline{\lim}_{\nu} F_{\lambda,k}(\phi_{\nu}, \vec{a}_{\nu})$ et donc $F_{\min} = F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a})$; l'infimum est donc un minimum. **CQFD**

3.3 Régularité des solutions

On montre ici que les couples minimisants la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ vérifient un système d'équations aux dérivées partielles et que les solutions de cette équation sont C^{∞} .

On utilise pour cela l'ellipticité du système d'équations avec le théorème suivant. La notion d'ellipticité utilisée est celle de l'inversibilité du symbole principal avec une estimée sur l'inverse (cf [LM], p. 188).

Théorème 3.3.1 . Soit X une variété compacte sans bord ; soient E et F des fibrés vectoriels C^∞ sur X et K un opérateur différentiel linéaire elliptique de $\mathcal{D}'(E)$ vers $\mathcal{D}'(F)$ d'ordre $n \geq 0$. Si $f \in \mathcal{D}'(E)$ vérifie

$$Kf \in W_m^p(F) \quad (3.3.1)$$

alors f appartient à $W_{m+n}^p(E)$.

Preuve. Par le calcul symbolique, il suffit de montrer que, si U est un opérateur pseudodifférentiel elliptique d'ordre $-n$ de F vers E et si $f_2 \in W_{m+n}^p(E)$, alors $U(f_2) \in W_m^p(F)$.

Le cas particulier où E et F sont égaux au fibré trivial $\mathbb{R} \times X$ est traité dans le théorème 2.5 (p. 268) de [Tay].

En combinant les résultats de ce livre (en particulier la proposition 4.5 p. 278 de [Tay] qui concerne la régularité L^p locale) avec les théorèmes du livre [LM] (p. 177), on obtient notre résultat. **CQFD**

Théorème 3.3.2 . La fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ est C^1 et on a, en tout point (ϕ, \vec{a}) de \mathcal{A} , et pour tout $(\phi', \vec{a}') \in T_{(\phi, \vec{a})}\mathcal{A}$ (identifié à \mathcal{A}) :

$$\begin{aligned} D_{(\phi, \vec{a})}F_{\lambda,k}(\phi', \vec{a}') &= \int_{\Omega} \operatorname{Re}[\overline{\phi'}\{[i\vec{\nabla} + \vec{A}_0 + \vec{a}]^2\phi - (\lambda - |\phi|^2)\phi\}] \\ &+ \int_{\Omega} \vec{a}'\{\operatorname{Re}[\overline{\phi}(i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi)] + k^2L\vec{a}\} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

où $T_{(\phi, \vec{a})}\mathcal{A}$ est l'espace tangent, $D_{(\phi, \vec{a})}F_{\lambda,k}$ est la différentielle de $F_{\lambda,k}$ et L est défini en (3.1.4).

Preuve. Nous allons montrer que la fonctionnelle est dérivable au sens de Fréchet et on notera la différentielle DF .

Soit $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ et (ϕ', \vec{a}') un élément de l'espace tangent $T_{(\phi, \vec{a})}\mathcal{A}$ qui s'identifie à \mathcal{A} . On omet dans cette démonstration la référence à (λ, k) dans $F_{\lambda,k}$.

On donne tout de suite l'expression de la différentielle, et on vérifiera un peu plus loin que c'est bien la différentielle au sens de Fréchet

$$\left\{ \begin{aligned} DF_{(\phi, \vec{a})}(\phi', \vec{a}') &= \int_{\Omega} \operatorname{Re}\{\overline{[i\vec{\nabla}\phi' + \vec{A}\phi']} \cdot [i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}\phi]\} \\ &+ \int_{\Omega} k^2 \operatorname{rot} \vec{a}' \operatorname{rot} \vec{a} - \operatorname{Re}[\phi'(\lambda - |\phi|^2)\phi] \\ &+ \int_{\Omega} \vec{a}' \operatorname{Re}[\overline{\phi}(i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}\phi)] \end{aligned} \right. \quad (3.3.3)$$

avec $\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{a}$.

Une intégration par partie donne une autre forme à ces équations :

$$\begin{cases} DF_{\phi, \vec{a}}(\phi', \vec{a}') &= \int_{\Omega} \text{Re}[\bar{\phi}' \{ [i\vec{\nabla} + \vec{A}_0 + \vec{a}]^2 \phi - (\lambda - |\phi|^2)\phi \}] \\ &+ \int_{\Omega} \vec{a}' \{ \text{Re}[\bar{\phi}(i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}\phi)] + k^2 L \vec{a} \}. \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Pour tout $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ l'application $DF_{\phi, \vec{a}}$ est continue pour la norme de \mathcal{A} , il suffit d'appliquer les estimées L^p (2.2.3) et l'inégalité de Hölder.

On introduit la variation seconde W de F :

$$F(\phi + \phi', \vec{a} + \vec{a}') = F(\phi, \vec{a}) + DF_{\phi, \vec{a}}(\phi', \vec{a}') + W. \quad (3.3.5)$$

On peut alors calculer explicitement W

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Omega} \text{Re}[\vec{a}' \bar{\phi}' \{ i\vec{\nabla}(\phi + \phi') + (\vec{A}_0 + \vec{a})(\phi + \phi') + \vec{a}'\phi \}] \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \| i\vec{\nabla}\phi' + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi' + \vec{a}'\phi \|^2 + \frac{1}{2} |\vec{a}'\phi|^2 \\ &+ \int_{\Omega} -\frac{|\phi'|^2}{2} (\lambda - |\phi|^2) + (\text{Re}[\phi \bar{\phi}'] + \frac{|\phi'|^2}{2})^2 + \frac{k^2}{2} |\text{rot } \vec{a}'|^2. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

En utilisant les inégalités de Sobolev du théorème 2.2.3 et l'inégalité de Hölder, on obtient l'estimée suivante

$$\|W\|_{H^1} \leq (\|\phi'\|_{H^1} + \|\vec{a}'\|_{H^1})^2 C(\|\phi\|_{H^1}, \|\vec{a}\|_{H^1}, \|\phi'\|_{H^1}, \|\vec{a}'\|_{H^1}). \quad (3.3.7)$$

Dans l'équation (3.3.7), $C(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est une fonction continue de α, β, γ et δ . Par conséquent, la fonction $F_{\lambda, k}$ est de classe C^1 . **CQFD**

Remarque 3.3.3 . On peut en fait montrer que $F_{\lambda, k}$ est indéfiniment Fréchet dérivable. En particulier la différentielle seconde $(D^2 F_{\lambda, k})_{(\phi, \vec{a})}$ est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\mapsto \mathbb{R} \\ (\phi_1, \vec{a}_1), (\phi_2, \vec{a}_2) &\mapsto \int_{\Omega} \text{Re}\{\bar{\phi}_1 [i\vec{\nabla} + \vec{A}]^2 \phi_2\} \\ &+ 2 \text{Re}[\int_{\Omega} [\vec{a}_2 \bar{\phi}_1 + \vec{a}_1 \bar{\phi}_2] \cdot (i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}\phi)] \\ &+ \int_{\Omega} -(\lambda - |\phi|^2) \text{Re} \bar{\phi}_1 \phi_2 + 2 \text{Re}(\bar{\phi}\phi_2) \text{Re}(\bar{\phi}\phi_1) \\ &+ \int_{\Omega} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 |\phi|^2 + k^2 \text{rot } \vec{a}_1 \text{rot } \vec{a}_2. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Définition 3.3.4 . On définit l'espace

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ \begin{array}{l} (\phi, \vec{a}) \in H^1(E_1) \times H^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2) \\ \text{avec } \phi(z + v_i) = e^{i\pi(\xi_i y - \eta_i x)} \phi(z) \\ \text{et } \vec{a} \text{ } \mathcal{L}\text{-périodique.} \end{array} \right\} \quad (3.3.9)$$

On a enlevé à la définition de \mathcal{A} (2.4.31) les contraintes $\int_{\Omega} \vec{a} = 0$ et $\operatorname{div} \vec{a} = 0$.

Proposition 3.3.5 . L'espace $H_0^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ est l'espace des fonctions périodique de moyenne nulle sur Ω et de classe H^2 . On définit l'espace $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times H_0^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$. L'application

$$\left\{ \begin{array}{l} S : \mathcal{A}' \mapsto \mathcal{A}_2 \\ (\phi, \vec{a}, f, t) \mapsto \left(\begin{array}{l} \phi(z+t)e^{if(z+t)+i\pi[t_x y - t_y x]} \\ \vec{a}(z+t) + \vec{\nabla} f(z+t) + 2\pi \begin{pmatrix} -t_y \\ t_x \end{pmatrix} \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (3.3.10)$$

est bijective. Par ailleurs $F_{\lambda,k}(S(\phi, \vec{a}, f, t)) = F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a})$.

Remarque 3.3.6 . L'application S n'est pas différentiable au sens de Fréchet car elle contient des translations qui ne sont pas différentiables.

Preuve. Montrons que l'application S est bien à valeur dans \mathcal{A}_2 . Soit $(\phi', \vec{a}') = S(\phi, \vec{a}, f, t)$; on a

$$\begin{aligned} \phi'(z+t_i) &= \phi(z+t+t_i)e^{if(z+t+t_i)+i\pi[t_x(y+t_{i,y})-t_y(x+t_{i,x})]} \\ &= \phi(z+t)e^{i\pi[t_{i,x}(y+t_y)-t_{i,y}(x+t_x)]}e^{if(z+t)+i\pi[t_x y - t_y x]+i\pi[t_x t_{i,y} - t_y t_{i,x}]} \\ &= \phi(z+t)e^{i\pi[t_{i,x}y - t_{i,y}x]}e^{i\pi[t_{i,x}t_y - t_{i,y}t_x]} \\ &\quad e^{if(z+t)+i\pi[t_x y - t_y x]+i\pi[t_x t_{i,y} - t_y t_{i,x}]} \\ &= \phi(z+t)e^{i\pi[t_{i,x}y - t_{i,y}x]}e^{if(z+t)+i\pi[t_x y - t_y x]} \\ &= \phi'(z)e^{i\pi[t_{i,x}y - t_{i,y}x]} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

donc $\phi' \in H^1(E_1)$. Pour \vec{a}' la vérification est triviale.

On a facilement en intégrant \vec{a}' sur Ω la relation

$$\int_{\Omega} \vec{a}' = 2\pi \begin{pmatrix} -t_y \\ t_x \end{pmatrix}. \quad (3.3.12)$$

La divergence de \vec{a}' vérifie

$$\operatorname{div} \vec{a}' = \Delta f(z+t). \quad (3.3.13)$$

La fonction f est de moyenne nulle sur Ω et est périodique. On peut donc par le lemme 3.1.9 inverser l'équation précédente avec t donné par (3.3.12) :

$$\Delta^{-1}[\operatorname{div} \vec{a}'](z-t) = f(z). \quad (3.3.14)$$

où Δ^{-1} est l'application

$$\begin{cases} \Delta^{-1} : L^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}) & \mapsto H_0^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto S^{-1}(f). \end{cases} \quad (3.3.15)$$

On a donc une fonction réciproque de S .

Calculons maintenant l'énergie de (ϕ', \vec{a}') ; on a la formule de changement de jauge

$$\begin{aligned} \phi(z+t)e^{if(z+t)} &= \phi'e^{-iu(z)} \\ \vec{a}(z+t) + \vec{\nabla}f(z+t) + \pi \begin{pmatrix} -t_y \\ t_x \end{pmatrix} &= \vec{a}' - \vec{\nabla}u \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

avec $u(z) = \pi[t_x y - x t_y]$. Cela nous donne donc

$$F_{\lambda,k}(\phi', \vec{a}') = F_{\lambda,k}(\phi(z+t)e^{if(z+t)}, \vec{a}(z+t) + \vec{\nabla}f(z+t) + \pi \begin{pmatrix} -t_y \\ t_x \end{pmatrix}). \quad (3.3.17)$$

L'intégrande de $F_{\lambda,k}$ est périodique selon le réseau \mathcal{L} . Puisque

$$(\vec{A}_0 + \vec{a}(z+t) + \vec{\nabla}f(z+t) + \pi \begin{pmatrix} -t_y \\ t_x \end{pmatrix}) = (\vec{A}_0 + \vec{a} + \vec{\nabla}f)(z+t) \quad (3.3.18)$$

on obtient l'égalité

$$F_{\lambda,k}(\phi(z+t)e^{if(z+t)}, \vec{a}(z+t) + \vec{\nabla}f(z+t) + \pi \begin{pmatrix} -t_y \\ t_x \end{pmatrix}) = F_{\lambda,k}(\phi e^{if}, \vec{a} + \vec{\nabla}f). \quad (3.3.19)$$

Par changement de jauge on obtient

$$F_{\lambda,k}(\phi e^{if}, \vec{a} + \vec{\nabla}f) = F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) \quad (3.3.20)$$

Ces trois égalités nous donnent le résultat.

CQFD

Théorème 3.3.7 . *Si $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ est un point critique de la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$, alors le couple vérifie les équations*

$$\begin{cases} [i\vec{\nabla} + \vec{A}_0 + \vec{a}]^2 \phi &= (\lambda - |\phi|^2)\phi, \\ -\text{rot}^* \text{rot } \vec{a} &= \frac{1}{k^2} \text{Re}[\bar{\phi}(i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi)]. \end{cases} \quad (3.3.21)$$

Remarque 3.3.8 . *En particulier si $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ minimise la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ alors il vérifie les équations (3.3.21).*

Preuve. Si $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ est un point critique pour $F_{\lambda,k}$ défini sur l'espace \mathcal{A} , alors on a pour tout $(\phi', \vec{a}') \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \operatorname{Re}[\bar{\phi}' \{ [i\vec{\nabla} + (\vec{A}_0 + \vec{a})]^2 \phi \} - (\lambda - |\phi|^2) \phi] \\ &+ \int_{\Omega} \vec{a}' \{ \operatorname{Re}[\bar{\phi}(i\vec{\nabla} \phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi)] + k^2 L \vec{a} \}. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

On peut donc affirmer que

$$\begin{aligned} [i\vec{\nabla} + (\vec{A}_0 + \vec{a})]^2 \phi - (\lambda - |\phi|^2) \phi &\in (H^1(E_1))^{\perp} \\ \operatorname{Re}[\bar{\phi}(i\vec{\nabla} \phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi)] + k^2 L \vec{a} &\in (H_{\operatorname{div},0}^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2))^{\perp}. \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Puisque $(H^1(E_1))^{\perp} = \{0\}$ on obtient la première équation

$$[i\vec{\nabla} + (\vec{A}_0 + \vec{a})]^2 \phi - (\lambda - |\phi|^2) \phi = 0. \quad (3.3.24)$$

Cependant $(H_{\operatorname{div},0}^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2))^{\perp}$ n'est pas réduit au potentiel nul. Par exemple tous les champs constants sont dans cet espace, il nous faut donc réfléchir un peu plus ; on pose

$$\vec{V} = \operatorname{Re}[\bar{\phi}(i\vec{\nabla} \phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi)] + k^2 L \vec{a}. \quad (3.3.25)$$

On peut écrire

$$\vec{V} = \vec{X} + \vec{d} + \vec{\nabla} f \quad (3.3.26)$$

avec $\vec{d} \in H_{\operatorname{div},0}^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2)$, $f \in H^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R})$, $\int_{\Omega} f = 0$ et \vec{X} est un vecteur constant.

Remarque 3.3.9 . *Il s'agit en fait d'une décomposition de Hodge (cf [GH], p. 84).*

Cette écriture se trouve facilement en dérivant

$$\operatorname{div} \vec{V} = \Delta f \quad (3.3.27)$$

que l'on inverse facilement en utilisant le lemme 3.1.9, on décompose ensuite

$$\vec{V} - \vec{\nabla} f \quad (3.3.28)$$

en un champ constant plus un champ d'intégrale nulle.

Le couple $(0, \vec{d})$ appartient à l'espace \mathcal{A} ; donc, puisque le couple (ϕ, \vec{a}) est critique, on obtient en utilisant l'expression différentielle (3.3.2)

$$\int_{\Omega} \vec{d} \cdot \vec{V} = 0. \quad (3.3.29)$$

L'expression différentielle (3.3.2) est aussi valable sur \mathcal{A}_2 , on obtient alors si $u \in \mathbb{R}$:

$$F_{\lambda,k}(\phi e^{iuf}, \vec{a} + u \vec{\nabla} f) = F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) + u \int_{\Omega} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} f + o(u). \quad (3.3.30)$$

Or on sait depuis la proposition 3.3.5 que

$$F_{\lambda,k}(\phi e^{iuf}, \vec{a} + u \vec{\nabla} f) = F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}). \quad (3.3.31)$$

On obtient donc

$$\int_{\Omega} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} f = 0. \quad (3.3.32)$$

Cela nous donne donc

$$\int_{\Omega} (\vec{V} - \vec{X}) \cdot \vec{V} = 0. \quad (3.3.33)$$

Le champ $\vec{V} - \vec{X}$ est d'intégrale nulle, cela nous donne

$$\int_{\Omega} \|\vec{V} - \vec{X}\|^2 = 0. \quad (3.3.34)$$

On a donc $\vec{V} = \vec{X}$, le champ est constant.

On pose

$$\begin{aligned} (\phi_t, \vec{a}_t) &= S(\phi, \vec{a}, 0, t) \\ &= (\phi(z+t)e^{i\pi[t_x y - x t_y]}, \vec{a}(z+t) + 2\pi \begin{pmatrix} -t_y \\ t_x \end{pmatrix}). \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

La propriété d'invariance de la proposition 3.3.5 nous donne

$$F_{\lambda,k}(\phi_t, \vec{a}_t) = F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}). \quad (3.3.36)$$

L'intégrande est périodique selon \mathcal{L} et

$$(\vec{A}_0 + \vec{a}_t)(z) = (\vec{A}_0 + \vec{a} + \pi \begin{pmatrix} -t_y \\ t_x \end{pmatrix})(z+t) \quad (3.3.37)$$

on obtient donc

$$F_{\lambda,k}(\phi_t, \vec{a}_t) = F_{\lambda,k}(\phi e^{i\pi[t_x y - x t_y]}, \vec{a} + \pi \begin{pmatrix} -t_y \\ t_x \end{pmatrix}). \quad (3.3.38)$$

L'expression différentielle (3.3.2) nous donne

$$F_{\lambda,k}(\phi e^{i\pi[t_x y - x t_y]}, \vec{a} + \pi \begin{pmatrix} -t_y \\ t_x \end{pmatrix}) = F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) + \int_{\Omega} \pi \begin{pmatrix} -t_y \\ t_x \end{pmatrix} \cdot \vec{V} + o(|t|) \quad (3.3.39)$$

En combinant les équations (3.3.36), (3.3.38) et (3.3.39), on obtient

$$\int_{\Omega} \pi \begin{pmatrix} -t_y \\ t_x \end{pmatrix} \cdot \vec{X} = 0 \quad (3.3.40)$$

pour tout complexe $t \in \mathbb{C}$. Cela ne peut être possible que si $\vec{X} = 0$ et donc $\vec{V} = 0$. **CQFD**

Les deux équations (3.3.21) sont appelées équations de Ginzburg-Landau. Le résultat suivant est très classique.

Théorème 3.3.10 . *Si un couple (ϕ, \vec{a}) est solution des équations (3.3.21) alors ce couple est C^∞ . En particulier les couples minimisants la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ sont C^∞ .*

Preuve.

1^{ère} étape :

On va prouver que (ϕ, \vec{a}) est C^∞ en montrant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\phi, \vec{a}) \in H^n(E_1) \times H^n_{\text{div},0}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2)$. On conclut ensuite grâce aux théorèmes d'injection de Sobolev.

Le système elliptique dont on souhaite montrer la régularité est le suivant

$$\begin{cases} H\phi &= \phi(\lambda - |\phi|^2) - 2\vec{a} \cdot (i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}_0\phi) - \vec{a}^2\phi \\ \Delta \vec{a} &= \frac{1}{k^2} \text{Re}[\bar{\phi}(i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}_0\phi)] + \frac{1}{k^2} \vec{a} |\phi|^2. \end{cases} \quad (3.3.41)$$

On a utilisé le fait que $\text{div } \vec{a} = 0$ pour remplacer $\text{rot}^* \text{rot}$ par $-\Delta$ et pour développer $[i\vec{\nabla} + \vec{A}_0 + \vec{a}]^2$.

Il n'est pas clair à priori que le membre de droite de l'équation (3.3.41) appartienne à L^2 , ce qui est pourtant le moyen le plus simple pour montrer que $(\phi, \vec{a}) \in H^2$.

2^{ème} étape :

Si $(\phi, \vec{a}) \in H^1$, alors $(\phi, \vec{a}) \in W_2^{\frac{3}{2}}$.

En effet une application répétée de l'inégalité de Hölder permet de prouver que le membre de droite de l'équation (3.3.41) appartient à $L^{\frac{3}{2}}$.

L'équation (3.3.41) nous dit alors précisément que $H\phi$ et $L\vec{a}$ appartiennent à $L^{\frac{3}{2}}$. Ensuite on applique le théorème 3.3.1 pour obtenir que $(\phi, \vec{a}) \in W_2^{\frac{3}{2}} \times W_2^{\frac{3}{2}}$.

3^{eme} étape :

On échange la régularité contre un contrôle en norme L^p .

Le théorème 2.2.3 nous donne l'inclusion

$$W_1^{\frac{3}{2}} \subset L^6. \quad (3.3.42)$$

L'inclusion (3.3.42) prouve que $(\phi, \vec{a}) \in W_1^6$. Cette inclusion de Sobolev est décisive car elle va nous permettre de montrer que le côté droit de l'équation (3.3.41) appartient à L^2 , ce qui nous manquait au début.

4^{eme} étape :

On prouve que $(\phi, \vec{a}) \in H^2$.

Par la régularité elliptique, il suffit de prouver que le membre de droite de (3.3.41) appartient à L^2 . On utilise pour cela les inégalités de Hölder et les résultats précédents

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \phi|^2 dx dy &\leq \|\vec{\nabla} \phi\|_{L^6}^2 \|\vec{a}\|_{L^3}^2 \\ \int_{\Omega} \|\vec{\phi} \vec{\nabla} \phi\|^2 dx dy &\leq \|\vec{\nabla} \phi\|_{L^6}^2 \|\phi\|_{L^3}^2. \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

Les autres termes ne posant pas de problème nouveau, nous ne les écrivons pas. On a donc prouvé que $(\phi, \vec{a}) \in H^2$. Une application du théorème 2.2.3 nous donne que $(\phi, \vec{a}) \in L^\infty$.

5^{eme} étape :

Supposons que (ϕ, \vec{a}) est de classe H^{n+1} avec $n \geq 1$.

Soit D_n un opérateur différentiel d'ordre n , on l'applique aux équations (3.3.41)

$$\begin{cases} D_n[H\phi] &= -2\vec{a} \cdot iD_n(\vec{\nabla} \phi) + P_n(\phi, \vec{a}) \\ D_n[-\Delta \vec{a}] &= \frac{1}{k^2} \text{Re}[\vec{\phi} iD_n(\vec{\nabla} \phi)] + Q_n(\phi, \vec{a}). \end{cases} \quad (3.3.44)$$

Les termes $P_n(\phi, \vec{a})$ et $Q_n(\phi, \vec{a})$ désignent des polynômes en les n premières dérivées de ϕ et \vec{a} . Donc tous les termes des deux polynômes appartiennent à H^1 donc à L^p pour $p < \infty$. Donc P_n et Q_n sont de carré intégrable grâce à l'inégalité de Hölder.

Le couple (ϕ, \vec{a}) appartient à L^∞ . La section $D_n(\vec{\nabla} \phi)$ appartient à L^2 par l'hypothèse de récurrence, le membre de gauche de l'équation (3.3.44) appartient alors à L^2 .

D'après la définition 2.2.1 des espaces de Sobolev, $H\phi$ et $-\Delta \vec{a}$ appartiennent à H^n .

L'ellipticité des opérateurs H et $-\Delta$ nous donne $(\phi, \vec{a}) \in H^{n+2} \times H^{n+2}$. Par récurrence (ϕ, \vec{a}) est de classe H^n pour tout n donc C^∞ . **CQFD**

3.4 Propriétés du minimum de la fonctionnelle

$F_{\lambda,k}$

On montre dans cette section divers résultats sur les minimums m_F et m_D définis à l'équation (2.4.18) des fonctionnelles $F_{\lambda,k}$ et $D_{\lambda,k}$ définies aux équations (3.2.1) et (2.4.17).

On utilisera les propriétés 2.4.15 de m_F et m_D . Commençons par un résultat asymptotique.

Lemme 3.4.1 . *Pour tout $k > 0$, on a les limites suivantes*

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_D(\lambda, k) = 0 \\ \lim_{H_{int} \rightarrow 0} G_{k, H_{ext}}^V(H_{int}) = \frac{H_{ext}^2}{2} \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Preuve. En revenant aux définitions (2.4.17) et (2.4.18), on a l'égalité

$$\begin{aligned} m_D(\lambda, k) = \min_{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}} & \int_{\Omega} \frac{1}{2\lambda} \|i \vec{\nabla} \phi + (\vec{A}_0 + \vec{a}) \phi\|^2 \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{4} (1 - |\phi|^2)^2 + \frac{k^2}{2\lambda^2} |\text{rot } \vec{a}|^2. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

L'ensemble des zéros de ϕ_0 est $z_0 + \mathcal{L}$ et ils sont tous de multiplicité 1 (cf proposition 3.1.6). On peut donc choisir un domaine fondamental Ω' tel que ϕ_0 possède un unique zéro dans l'intérieur de Ω' et ne possède pas d'autres zéro dans $\overline{\Omega'}$.

Soit f_δ la fonction définie sur \mathbb{R}^2 privée de $B(z_0, \delta)$ et de ses translatés et de valeur $\frac{1}{|\phi_0(z)|}$. La fonction f_δ est \mathcal{L} -périodique et de norme L^∞ bornée par $\frac{D}{\delta}$. On ne peut pas à priori prolonger f_δ en une fonction \mathcal{L} -périodique C^∞ sur \mathbb{R}^2 encore notée f_δ de norme $\frac{D}{\delta}$. Cependant on peut le faire si on autorise une norme légèrement plus grande, $\frac{D+1}{\delta}$ par exemple.

On a alors l'estimée

$$\int_{\Omega'} (1 - |f_\delta \phi_0|^2)^2 = O(\delta^2). \quad (3.4.3)$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe donc une section ϕ_ϵ de classe C^∞ vérifiant

$$\int_{\Omega'} (1 - |\phi_\epsilon|^2)^2 < \epsilon. \quad (3.4.4)$$

Pour toute section $\phi \in H^1(E_1)$, on a :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} \frac{1}{2\lambda} \|i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}_0\phi\|^2 = 0. \quad (3.4.5)$$

Il existe donc $\lambda_M(\epsilon) > 0$ tel que, $\forall \lambda > \lambda_M(\epsilon)$,

$$\int_{\Omega'} \frac{1}{2\lambda} \|i\vec{\nabla}\phi_\epsilon + \vec{A}_0\phi_\epsilon\|^2 < \epsilon. \quad (3.4.6)$$

On obtient donc, $\forall \lambda > \lambda_M(\epsilon)$:

$$0 \leq \frac{1}{\lambda^2} m_F(\lambda, k) \leq \frac{1}{\lambda^2} F_{\lambda, k}(\phi_\epsilon, 0) \leq \frac{3}{2}\epsilon. \quad (3.4.7)$$

On a donc bien la limite voulue. La deuxième limite provient de l'égalité $G_{k, H_{ext}}^V(H_{int}) = m_D(\frac{2\pi k}{H_{int}}, k) + \frac{1}{2}(H_{int} - H_{ext})^2$. **CQFD**

Le théorème ci-dessous utilise des idées de [BR], p. 253 ; la seule différence est que l'on opère sur une variété compacte.

Théorème 3.4.2 . *Si un couple (ϕ, \vec{a}) est solution des équations (3.3.21), alors la fonction ϕ vérifie l'inégalité :*

$$|\phi| \leq \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{2\pi k}{H_{int}}}. \quad (3.4.8)$$

Remarque 3.4.3 . *Pour le problème initial introduit en (2.1.4), l'inégalité s'écrit $|\phi| \leq 1$ et résulte des transformations (2.4.19) et (2.4.20). La densité d'électrons supraconducteurs $n = |\phi|^2$ est donc bornée par 1.*

Preuve. La fonction $|\phi|^2$ définie sur \mathbb{R}^2 est \mathcal{L} -périodique et définit par passage au quotient une fonction sur \mathbb{R}^2/\mathcal{L} . On va montrer qu'aux points où $|\phi|^2$ est maximum l'inégalité (3.4.8) est vérifiée. L'équation (3.3.21) peut s'écrire

$$-\Delta\phi + 2i\vec{A} \cdot \vec{\nabla}\phi + \vec{A}^2\phi = \phi(\lambda - |\phi|^2). \quad (3.4.9)$$

On calcule maintenant le laplacien de $|\phi|^2$ comme dans l'article [BR] .

$$\begin{aligned} \Delta |\phi|^2 &= \bar{\phi}\Delta\phi + \phi\Delta\bar{\phi} + 2\|\vec{\nabla}\phi\|^2 \\ &= -2|\phi|^2(\lambda - |\phi|^2) + 2\vec{A}^2|\phi|^2 \\ &\quad + 4\operatorname{Re}[\bar{\phi}\vec{A} \cdot i\vec{\nabla}\phi] + 2\|i\vec{\nabla}\phi\|^2 \\ &= -2|\phi|^2(\lambda - |\phi|^2) + 2\|i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}\phi\|^2. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Soit z un point de \mathbb{R}^2/\mathcal{L} où la fonction $|\phi|^2$ atteint son maximum. On obtient alors $[\Delta(|\phi|^2)](z) \leq 0$. Donc, par le calcul (3.4.10), on a $|\phi|(z) \leq \sqrt{\lambda}$ et, puisque z est un maximum, l'inégalité est vraie partout. **CQFD**

Théorème 3.4.4 . On a, pour tout $\lambda, \lambda' \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, l'inégalité

$$|(m_F(\lambda, k) - \frac{\lambda^2}{4}) - (m_F(\lambda', k) - \frac{\lambda'^2}{4})| \leq \frac{1}{2}|\lambda - \lambda'| \max(|\lambda|, |\lambda'|). \quad (3.4.11)$$

En particulier la fonction m_F est continue par rapport à λ (localement lipschitzienne).

Preuve. On a l'égalité suivante

$$(F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) - \frac{\lambda^2}{4}) - (F_{\lambda',k}(\phi, \vec{a}) - \frac{\lambda'^2}{4}) = -\frac{1}{2}(\lambda - \lambda') \int_{\Omega} |\phi|^2. \quad (3.4.12)$$

Soit (ϕ, \vec{a}) un couple qui minimise la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$, un tel couple existe grâce au théorème 3.2.4. On a alors la relation suivante qui découle du théorème 3.4.2

$$|(m_F(\lambda, k) - \frac{\lambda^2}{4}) - (F_{\lambda',k}(\phi, \vec{a}) - \frac{\lambda'^2}{4})| \leq \frac{1}{2}|\lambda - \lambda'|\lambda. \quad (3.4.13)$$

Par conséquent

$$(F_{\lambda',k}(\phi, \vec{a}) - \frac{\lambda'^2}{4}) - (m_F(\lambda, k) - \frac{\lambda^2}{4}) \leq \frac{1}{2}|\lambda - \lambda'| \max(|\lambda|, |\lambda'|). \quad (3.4.14)$$

De par la définition de $m_F(\lambda', k)$ comme minimum de $F_{\lambda',k}$, on déduit

$$(m_F(\lambda', k) - \frac{\lambda'^2}{4}) - (m_F(\lambda, k) - \frac{\lambda^2}{4}) \leq \frac{1}{2}|\lambda - \lambda'| \max(|\lambda|, |\lambda'|). \quad (3.4.15)$$

On intervertit λ et λ' et on obtient l'inégalité (3.4.11). La continuité de m_F découle trivialement de cette inégalité. **CQFD**

Remarque 3.4.5 . Nous prolongeons la fonction $G_{k,H_{ext}}^V(H_{int})$ en 0 par continuité en posant :

$$G_{k,H_{ext}}^V(0) = \frac{H_{ext}^2}{2}. \quad (3.4.16)$$

Théorème 3.4.6 . Il existe un champ $H_{int}^a \geq 0$ tel que :

$$\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V = G_{k,H_{ext}}^V(H_{int}^a). \quad (3.4.17)$$

Preuve. Si l'on revient à la définition (2.4.29) et utilisant la positivité de $F_{\lambda,k}$, on a l'inégalité évidente

$$G_{k,H_{ext}}^V(H_{int}) \geq \frac{1}{2}(H_{int} - H_{ext})^2. \quad (3.4.18)$$

Par conséquent :

$$\lim_{H_{int} \rightarrow +\infty} G_{k,H_{ext}}^V(H_{int}) = +\infty. \quad (3.4.19)$$

La fonction

$$\begin{cases} [0, +\infty[& \mapsto \mathbb{R} \\ H_{int} & \mapsto G_{k,H_{ext}}^V(H_{int}) \end{cases} \quad (3.4.20)$$

est continue et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Par conséquent, elle atteint son minimum $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V$ en au moins un point de $[0, +\infty[$.

Si $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V = \frac{H_{ext}^2}{2}$, alors le minimum est atteint en $H_{int} = 0$ et cette énergie peut être atteinte par l'état pur.

Si $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V = \frac{1}{4}$, alors le minimum de $G_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi, \vec{a})$ est atteint par $H_{int} = H_{ext}$ et $(\phi, \vec{a}) = (0, 0)$; l'énergie du supraconducteur peut être atteinte par l'état normal.

Dans les autres cas, l'énergie minimale $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V$ est atteinte par un état mixte de la forme (H_{int}, ϕ, \vec{a}) avec $(\phi, \vec{a}) \neq (0, 0)$. **CQFD**

Remarque 3.4.7 . Comme souvent dans les transitions de phase, il existe certains cas où la même énergie minimale peut être atteinte par deux états différents. Ce cas se produit effectivement dans notre étude, comme on peut le voir au lemme 5.1.6 ou au théorème 5.1.7.

Lemme 3.4.8 . Si $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ vérifie :

$$\int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2 = 0 \text{ et } \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 = 0 \quad (3.4.21)$$

alors $\phi = 0$ et $\vec{a} = 0$.

Preuve. Par la proposition 3.1.10, on a $\vec{a} = 0$; il reste donc l'équation

$$\langle H\phi, \phi \rangle = \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}_0\phi\|^2 = 0. \quad (3.4.22)$$

Puisque ϕ est de carré intégrable, on peut effectuer un développement de ϕ sur les fonctions propres normalisées définies au théorème 3.1.1 :

$$\phi = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \phi_i, \quad (3.4.23)$$

on a alors

$$\begin{aligned}
\langle H\phi, \phi \rangle &= \langle \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i H\phi_i, \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \phi_i \rangle \\
&= \langle \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (2\pi + 4\pi i) \phi_i, \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \phi_i \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^2 (2\pi + 4\pi i) \langle \phi_i, \phi_i \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^2 (2\pi + 4\pi i).
\end{aligned} \tag{3.4.24}$$

Cette quantité ne peut être nulle que si pour tout $i \geq 0$, $\alpha_i = 0$, c'est à dire $\phi = 0$. **CQFD**

Lemme 3.4.9 . *Si le couple $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ vérifie les équations de Ginzburg-Landau (3.3.21) et ϕ n'est pas identiquement nul alors \vec{a} n'est pas identiquement nul.*

Preuve. Par le théorème 3.3.10, le couple (ϕ, \vec{a}) est C^∞ . Supposons par l'absurde que $\vec{a} = 0$; on a alors

$$\operatorname{Re} \bar{\phi} [i \vec{\nabla} \phi + \vec{A}_0 \phi] = 0. \tag{3.4.25}$$

La fonction ϕ n'est pas identiquement nulle; par conséquent l'ensemble

$$C = \{z \in \Omega \text{ tel que } \phi(z) \neq 0\} \tag{3.4.26}$$

est un ouvert non vide.

Soit donc $B(z_a, \delta)$ une boule incluse dans C ; si δ est assez petit, alors on peut écrire sur $B(z_a, \delta)$

$$\phi(z) = r(z) e^{i\theta(z)} \tag{3.4.27}$$

avec r et θ fonctions réelles de classe C^∞ et $r > 0$.

Réécrivons l'équation (3.4.25) avec l'écriture (3.4.27); on a

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{Re} \bar{\phi} [i \vec{\nabla} \phi + \vec{A}_0 \phi] \\
&= \operatorname{Re} r e^{-i\theta(z)} [i \{ \vec{\nabla} r e^{i\theta} + i r \vec{\nabla} \theta e^{i\theta} \} + \vec{A}_0 r e^{i\theta}] \\
&= \operatorname{Re} r [i \{ \vec{\nabla} r + i r \vec{\nabla} \theta \} + \vec{A}_0 r] \\
&= \operatorname{Re} r [i \vec{\nabla} r - r \vec{\nabla} \theta + \vec{A}_0 r] \\
&= r [-r \vec{\nabla} \theta + \vec{A}_0 r] \\
&= r^2 [-\vec{\nabla} \theta + \vec{A}_0]
\end{aligned} \tag{3.4.28}$$

On obtient donc l'égalité $\vec{A}_0 = \vec{\nabla} \theta$ car $r > 0$.

En appliquant le rotationnel, on obtient $\operatorname{rot} \vec{\nabla} \theta = 2\pi$, car d'après (2.4.14), $\operatorname{rot} \vec{A}_0 = 2\pi$. C'est absurde car $\operatorname{rot} \vec{\nabla} \theta = 0$ et donc $\phi = 0$. **CQFD**

Proposition 3.4.10 . Soit $k' > k$; si (ϕ_k, \vec{a}_k) minimise $F_{\lambda,k}$ et $(\phi_{k'}, \vec{a}_{k'})$ minimise $F_{\lambda,k'}$, alors on a l'inégalité :

$$\int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_{k'}|^2 \leq \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_k|^2. \quad (3.4.29)$$

Si de plus $m_F(\lambda, k) < \frac{\lambda^2}{4}$, alors l'inégalité est stricte.

Preuve. Montrons la première assertion. Supposons par l'absurde que $\int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_{k'}|^2 > \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_k|^2$; on a

$$\begin{aligned} F_{\lambda,k'}(\phi_{k'}, \vec{a}_{k'}) &= F_{\lambda,k}(\phi_{k'}, \vec{a}_{k'}) + \frac{k'^2 - k^2}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_{k'}|^2 \\ &> F_{\lambda,k}(\phi_{k'}, \vec{a}_{k'}) + \frac{k'^2 - k^2}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_k|^2 \\ &> F_{\lambda,k}(\phi_k, \vec{a}_k) + \frac{k'^2 - k^2}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_k|^2 \\ &> F_{\lambda,k'}(\phi_k, \vec{a}_k). \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

Par conséquent, le couple $(\phi_{k'}, \vec{a}_{k'})$ ne minimise pas la fonctionnelle, ce qui est absurde.

Montrons la deuxième assertion, puisque $m_F(\lambda, k) < \frac{\lambda^2}{4}$ on a $(\phi_k, \vec{a}_k) \neq (0, 0)$; donc par la proposition 3.4.9 le champ \vec{a}_k est différent de 0.

Supposons par l'absurde que $\int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_{k'}|^2 \geq \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_k|^2$; on a

$$\begin{aligned} m_F(\lambda, k') &= F_{\lambda,k'}(\phi_{k'}, \vec{a}_{k'}) \\ &= F_{\lambda,k}(\phi_{k'}, \vec{a}_{k'}) + \frac{k'^2 - k^2}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_{k'}|^2 \\ &\geq F_{\lambda,k}(\phi_{k'}, \vec{a}_{k'}) + \frac{k'^2 - k^2}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_k|^2 \\ &\geq F_{\lambda,k}(\phi_k, \vec{a}_k) + \frac{k'^2 - k^2}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_k|^2 \\ &\geq F_{\lambda,k'}(\phi_k, \vec{a}_k). \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

Par conséquent, le couple (ϕ_k, \vec{a}_k) minimise aussi la fonctionnelle $F_{\lambda,k'}$; on a alors par les équations de Ginzburg-Landau

$$\begin{cases} L \vec{a}_k &= -\frac{1}{k^2} \operatorname{Re} \overline{\phi_k} (i \vec{\nabla} \phi_k + (\vec{A}_0 + \vec{a}_k) \phi_k) \\ L \vec{a}_k &= -\frac{1}{k'^2} \operatorname{Re} \overline{\phi_k} (i \vec{\nabla} \phi_k + (\vec{A}_0 + \vec{a}_k) \phi_k). \end{cases} \quad (3.4.32)$$

Puisque $k' > k$, on obtient $L \vec{a}_k = 0$; donc $\vec{a}_k = 0$ car L est injectif (cf 3.1.8). C'est absurde. **CQFD**

Théorème 3.4.11 . (Comportement par rapport à k de m_F) La fonction $k \mapsto m_F(\lambda, k)$ est monotone croissante. De plus

– Si $m_F(\lambda, k) = \frac{\lambda^2}{4}$ alors

$$\forall k' > k, m_F(\lambda, k') = \frac{\lambda^2}{4}. \quad (3.4.33)$$

– Si $m_F(\lambda, k) < \frac{\lambda^2}{4}$ alors

$$\forall k' > k, m_F(\lambda, k') > m_F(\lambda, k). \quad (3.4.34)$$

Preuve. La fonction

$$F_{\lambda, k}(\phi, \vec{a}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|i \vec{\nabla} \phi + (\vec{A}_0 + \vec{a}) \phi\|^2 + \frac{(\lambda - |\phi|^2)^2}{4} + \frac{k^2}{2} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 \quad (3.4.35)$$

est croissante par rapport à k par conséquent la fonction m_F est également croissante par rapport à k .

Montrons le premier résultat ; si $k' > k$, on a par les hypothèses et le raisonnement précédent

$$m_F(\lambda, k) = \frac{\lambda^2}{4} \text{ et } m_F(\lambda, k') \geq m_F(\lambda, k). \quad (3.4.36)$$

Or $m_F(\lambda, k') \leq \frac{\lambda^2}{4}$ par la proposition 2.4.15 ; par conséquent, on a

$$\forall k' > k, m_F(\lambda, k') = \frac{\lambda^2}{4}. \quad (3.4.37)$$

Montrons le second résultat : Si $m_F(\lambda, k') = \frac{\lambda^2}{4}$ alors on a le résultat. Si $m_F(\lambda, k') \neq \frac{\lambda^2}{4}$ on a par la proposition 2.4.15

$$m_F(\lambda, k') < \frac{\lambda^2}{4}. \quad (3.4.38)$$

Il existe un couple $(\phi_e, \vec{a}_e) \in \mathcal{A}$ qui est forcément différent du couple nul tel que $m_F(\lambda, k') = F_{\lambda, k'}(\phi_e, \vec{a}_e)$. Ce couple vérifie les équations de Ginzburg-Landau.

Le lemme 3.4.9 implique que le champ \vec{a}_e est différent de 0.

On a alors

$$\begin{aligned} m_F(\lambda, k') &= F_{\lambda, k'}(\phi_e, \vec{a}_e) \\ &> F_{\lambda, k}(\phi_e, \vec{a}_e) \geq m_F(\lambda, k). \end{aligned} \quad (3.4.39)$$

On a bien le résultat voulu dans les deux cas.

CQFD

Théorème 3.4.12 . (*Comportement par rapport à λ*)

La fonction $\lambda \mapsto m_D(\lambda, k)$ est monotone décroissante. De plus

– *Si $m_D(\lambda, k) = \frac{1}{4}$ alors*

$$\forall \lambda' < \lambda, m_D(\lambda', k) = \frac{1}{4}. \quad (3.4.40)$$

– *Si $m_D(\lambda, k) < \frac{1}{4}$ alors*

$$\forall \lambda' < \lambda, m_D(\lambda', k) > m_D(\lambda, k). \quad (3.4.41)$$

Preuve. On a

$$m_D(\lambda, k) = \inf_{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}} \int_{\Omega} \frac{1}{2\lambda} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \frac{1}{4}(1 - |\phi|^2)^2 + \frac{k^2}{2\lambda^2} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2. \quad (3.4.42)$$

L'expression à l'intérieur du minimum (cf (2.4.17)) est décroissante par rapport à λ ; il en est donc de même du minimum.

Montrons le premier résultat. On sait que la fonction $m_D(\lambda, k)$ est décroissante par rapport à λ donc

$$\forall \lambda' < \lambda, m_D(\lambda', k) \geq \frac{1}{4}. \quad (3.4.43)$$

Mais on sait (cf 2.4.15) que

$$\forall \lambda' > 0, m_D(\lambda', k) \leq \frac{1}{4}. \quad (3.4.44)$$

Les équations (3.4.43) et (3.4.44) impliquent donc une égalité.

Supposons maintenant que $m_D(\lambda, k) < \frac{1}{4}$.

On sait par le théorème 3.2.4 qu'il existe un couple $(\phi_e, \vec{a}_e) \in \mathcal{A}$ tel que

$$m_D(\lambda, k) = D_{\lambda, k}(\phi_e, \vec{a}_e). \quad (3.4.45)$$

Le minimum de la fonctionnelle $F_{\lambda, k}$ est alors atteint sur un couple différent du couple $(0, 0)$ puisque si c'était le cas, on aurait $m_D(\lambda, k) = \frac{1}{4}$.

On a alors par la contraposée du lemme 3.4.8

$$\int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi_e + (\vec{A}_0 + \vec{a}_e)\phi_e\|^2 \neq 0 \quad \text{ou} \quad \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}_e|^2 \neq 0. \quad (3.4.46)$$

Une inspection de la formule (2.4.17) nous montre que $D_{\lambda,k}(\phi, \vec{a})$ est alors strictement décroissant par rapport à λ . Soit $\lambda' < \lambda$, on a alors

$$\begin{aligned} m_D(\lambda', k) &= \inf_{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}} D_{\lambda',k}(\phi, \vec{a}) \\ &= D_{\lambda',k}(\phi_e, \vec{a}_e) \\ &> D_{\lambda,k}(\phi_e, \vec{a}_e) \geq m_D(\lambda, k). \end{aligned} \quad (3.4.47)$$

On a donc bien montré qu'il y a une stricte décroissance. **CQFD**

Théorème 3.4.13 . Si le champ H_{int}^a réalise le minimum de la fonction $H_{int} \mapsto G_{k,H_{ext}}^V(H_{int})$, alors $H_{int}^a \leq H_{ext}$

Preuve. Par le théorème 3.4.12, la fonction

$$H_{int} \mapsto \left(\frac{H_{int}}{2\pi k}\right)^2 m_F\left(\frac{2\pi k}{H_{int}}, k\right) \quad (3.4.48)$$

est une fonction croissante par rapport à H_{int} .

Par conséquent, la fonction

$$\begin{cases} [0, +\infty[& \mapsto \mathbb{R} \\ H_{int} & \mapsto G_{k,H_{ext}}^V(H_{int}) = \left(\frac{H_{int}}{2\pi k}\right)^2 m_F\left(\frac{2\pi k}{H_{int}}, k\right) + \frac{1}{2}(H_{int} - H_{ext})^2 \end{cases} \quad (3.4.49)$$

est strictement croissante sur l'intervalle $]H_{ext}, +\infty[$ comme somme d'une fonction croissante et d'une fonction strictement croissante. Donc le minimum de $G_{k,H_{ext}}^V(H_{int})$ n'est pas atteint sur cet intervalle ; le minimum sur $[0, +\infty[$ vérifie par conséquent $H_{int}^a \leq H_{ext}$. **CQFD**

3.5 Formule de Bochner-Kodaira-Nakano

La fonctionnelle réduite lorsque $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ prend la forme particulière suivante

$$F_{\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}}}(\phi, \vec{a}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \frac{1}{4}(\lambda - |\phi|^2)^2 + \frac{1}{4}|\text{rot } \vec{a}|^2. \quad (3.5.1)$$

Dans cette section, on montre une formule de Bochner-Kodaira-Nakano (cf [De] pour des formules générales sur des fibrés de variétés complexes) qui va nous donner de très utiles renseignements. Cette formule est très classique et est aussi appelée formule de Bogmol'nyi, Weitzenbock, Lichnerowicz

(cf [JT] et [Li]) selon les différentes écoles scientifiques.

On introduit pour cela une nouvelle fonctionnelle

$$A_+(\phi, \vec{a}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |D_+ \phi|^2 + \frac{1}{4} |\operatorname{rot} \vec{A}_0 + \operatorname{rot} \vec{a} - (\lambda - |\phi|^2)|^2, \quad (3.5.2)$$

où

$$\begin{aligned} D_+ \phi &= 2L_+ \phi + (a_y - ia_x) \phi \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_y \phi - i A_x \phi \\ &= -i [i \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_x \phi] + [i \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_y \phi]. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 3.5.1 . Si $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$, alors

$$F_{\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}}}(\phi, \vec{a}) = \lambda \pi - \pi^2 + A_+(\phi, \vec{a}). \quad (3.5.4)$$

Preuve. On fait le calcul sur les fonctions régulières et on conclut par densité.

$$\begin{aligned} 2(A_+ - F) &= \int_{\Omega} [(\frac{\partial \phi}{\partial x} - i A_x \phi)(\overline{i \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_y \phi}) + (\overline{\frac{\partial \phi}{\partial x} - i A_x \phi})(i \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_y \phi) \\ &\quad - (\operatorname{rot} \vec{A})(\lambda - |\phi|^2)] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ |\operatorname{rot} \vec{A}|^2 - |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 \} dx dy \\ &= \int_{\Omega} [i(\partial_x \bar{\phi} \partial_y \phi - \partial_x \phi \partial_y \bar{\phi}) + (A_y \phi \partial_x \bar{\phi} - A_x \bar{\phi} \partial_y \phi) \\ &\quad + (A_y \bar{\phi} \partial_x \phi - A_x \phi \partial_y \bar{\phi}) + \partial_x A_y |\phi|^2 - \partial_y A_x |\phi|^2] dx dy \\ &\quad + 2\pi^2 - 2\pi\lambda \\ &= \int_{\Omega} i(\partial_x [\bar{\phi} \partial_y \phi] - \partial_y [\bar{\phi} \partial_x \phi]) + \partial_x [A_y |\phi|^2] - \partial_y [A_x |\phi|^2] \\ &\quad + 2\pi^2 - 2\pi\lambda \\ &= \int_{\Omega} \partial_x [\bar{\phi} (i \partial_y \phi + A_y \phi)] - \partial_y [\bar{\phi} (i \partial_x \phi + A_x \phi)] \\ &\quad + 2\pi^2 - 2\pi\lambda \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{W} dx dy + 2\pi^2 - 2\pi\lambda. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Le champ de vecteur

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} \bar{\phi} (i \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_y \phi) \\ -\bar{\phi} (i \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_x \phi) \end{pmatrix} \quad (3.5.6)$$

est \mathcal{L} -périodique sur \mathbb{R}^2 donc est bien défini sur \mathbb{R}^2/\mathcal{L} . Par conséquent, la dernière intégrale est nulle puisque cet espace est compact sans bord. **CQFD**

Remarque 3.5.2 . *Compte tenu de la positivité de A_+ , on a pour tout $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$*

$$F_{\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}}}(\phi, \vec{a}) \geq \lambda\pi - \pi^2. \quad (3.5.7)$$

Le théorème 3.5.1 nous permet de donner des résultats très précis sur le problème réduit.

Théorème 3.5.3 . *Si $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et si $\lambda \leq 2\pi$ alors*

$$\inf_{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}} F_{\lambda, k}(\phi, \vec{a}) = \frac{\lambda^2}{4}. \quad (3.5.8)$$

De plus ce minimum n'est atteint que pour le couple $(0, 0)$.

Remarque 3.5.4 . *Le théorème précédent ne résout pas le problème 2.4.14. Ce problème sera résolu pour une large classe de cas dans les théorèmes 5.1.7 et 5.3.5 et la démonstration n'utilisera pas le théorème précédent.*

Preuve. On utilise la fonctionnelle (3.5.2).

On développe $F_{\lambda, k}$:

$$\begin{aligned} F_{\lambda, k}(\phi, \vec{a}) &= \frac{1}{2}(k^2 - \frac{1}{2}) \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 + F_{\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}}}(\phi, \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2}(k^2 - \frac{1}{2}) \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 + \lambda\pi - \pi^2 + A_+(\phi, \vec{a}) \\ &= \lambda\pi - \pi^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (2\pi - \lambda)^2 + 2(2\pi - \lambda)(\operatorname{rot} \vec{a} + |\phi|^2) \\ &+ \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a} + |\phi|^2|^2 + \frac{1}{2}(k^2 - \frac{1}{2}) \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|D_+\phi\|^2 \\ &= \frac{\lambda^2}{4} + 2 \int_{\Omega} (2\pi - \lambda)|\phi|^2 \\ &+ \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a} + |\phi|^2|^2 + \frac{1}{2}(k^2 - \frac{1}{2}) \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|D_+\phi\|^2 \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Ce calcul nous donne si $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lambda \leq 2\pi$ l'inégalité

$$F_{\lambda, k}(\phi, \vec{a}) \geq \frac{\lambda^2}{4}. \quad (3.5.10)$$

Supposons que $F_{\lambda, k}(\phi, \vec{a}) = \frac{\lambda^2}{4}$; alors la formule (3.5.9) nous donne les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= (2\pi - \lambda) \int_{\Omega} |\phi|^2, \\ 0 &= (k^2 - \frac{1}{2}) \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2, \\ 0 &= \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a} + |\phi|^2|^2, \\ 0 &= \int_{\Omega} \|D_+\phi\|^2. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

La troisième égalité implique

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{a} + |\phi|^2 = 0. \quad (3.5.12)$$

En intégrant sur Ω , on obtient

$$\int_{\Omega} |\phi|^2 = - \int_{\Omega} \operatorname{rot} \overrightarrow{a} = 0 \quad (3.5.13)$$

et par conséquent $\phi = 0$.

Cette relation implique alors que $\operatorname{rot} \overrightarrow{a} = 0$; la proposition 3.1.10 nous donne la dernière annulation $\overrightarrow{a} = 0$. **CQFD**

Chapitre 4

La bifurcation d'Abrikosov

Ce chapitre est consacré exclusivement à l'étude de la bifurcation d'Abrikosov. Dans la première section on définit la bifurcation et, dans les deux sections qui suivent, on étudie la stabilité de ce minimum.

Dans la dernière section on étudie le comportement quand k tend vers ∞ des solutions des équations de Ginzburg-Landau et on montre que les solutions qui apparaissent sont les solutions bifurquées et la solution triviale.

4.1 Réduction de Lyapunov-Schmidt et bifurcation

La bifurcation d'Abrikosov consiste à trouver les solutions des équations de Ginzburg-Landau dans un voisinage de l'état normal (H_{ext}, ϕ, \vec{a}) .

Pour cela on va d'abord étudier dans ce chapitre les solutions des équations de Ginzburg-Landau pour la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$; cette étude ne dépend pas de H_{ext} mais de H_{int} et k . On étudiera alors dans le chapitre suivant le minimum de

$$G_{k,H_{ext}}^V(H_{int}) = \frac{1}{\lambda^2} m_F(\lambda, k) + \frac{1}{2} (H_{int} - H_{ext})^2 \quad (4.1.1)$$

avec $\lambda = \frac{2\pi k}{H_{int}}$. On montrera que l'hypothèse d'Abrikosov concernant les solutions minimisantes est pertinente dans un certain domaine du plan (k, H_{ext}) . Par commodité on utilisera la variable $\lambda = \frac{2\pi k}{H_{int}}$ qui est plus pratique pour écrire nos calculs.

Commençons par déterminer la nature du couple $(0, 0)$ du point de vue de la théorie de Morse.

Proposition 4.1.1 . *Le couple $(0,0)$ est un point critique pour la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$. Ce point est non dégénéré si et seulement si $\lambda \neq 2\pi + 4\pi n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).*

La forme quadratique $D^2F_{(0,0)}(\delta\phi, \vec{\delta a})$ est définie positive si et seulement si $\lambda < 2\pi$.

Preuve. La différentielle première au point (ϕ, \vec{a}) est la forme linéaire

$$\begin{aligned} D_{(\phi, \vec{a})}F_{\lambda,k}(\phi', \vec{a}') &= \int_{\Omega} \operatorname{Re}[\overline{\phi'}\{[i\vec{\nabla} + (\vec{A}_0 + \vec{a})]^2\phi\} - (\lambda - |\phi|^2)\phi] \\ &+ \int_{\Omega} \vec{a}'\{\operatorname{Re}[\overline{\phi}(i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi)] + k^2L\vec{a}\} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

où L est l'opérateur étudié dans la section 3.1.2. On a facilement

$$D_{(0,0)}F_{\lambda,k} = 0. \quad (4.1.3)$$

La différentielle seconde au point (ϕ, \vec{a}) est la forme bilinéaire de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\begin{aligned} (\phi_1, \vec{a}_1), (\phi_2, \vec{a}_2) &\mapsto \int_{\Omega} \operatorname{Re}\{\overline{\phi_1}[i\vec{\nabla} + \vec{A}]^2\phi_2\} \\ &+ 2\operatorname{Re}[\int_{\Omega} [\vec{a}_2\overline{\phi_1} + \vec{a}_1\overline{\phi_2}]\cdot(i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}\phi)] \\ &+ \int_{\Omega} -(\lambda - |\phi|^2)\operatorname{Re}\overline{\phi_1}\phi_2 + 2\operatorname{Re}(\overline{\phi}\phi_2)\operatorname{Re}(\overline{\phi}\phi_1) \\ &+ \int_{\Omega} \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2|\phi|^2 + k^2\operatorname{rot}\vec{a}_1\cdot\operatorname{rot}\vec{a}_2. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

On a facilement

$$\begin{aligned} D_{(0,0)}^2F_{\lambda,k} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\mapsto \mathbb{R} \\ (\phi_1, \vec{a}_1), (\phi_2, \vec{a}_2) &\mapsto \int_{\Omega} \operatorname{Re}\{\overline{\phi_1}([i\vec{\nabla} + \vec{A}_0]^2 - \lambda)\phi_2\} \\ &+ \int_{\Omega} k^2\operatorname{rot}\vec{a}_1\operatorname{rot}\vec{a}_2. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

La forme quadratique associée $D_{(0,0)}^2F_{\lambda,k}(\phi', \vec{a}')$ a pour expression

$$D_{(0,0)}^2F_{\lambda,k}(\phi', \vec{a}') = \int_{\Omega} \overline{\phi'}([i\vec{\nabla} + \vec{A}_0]^2 - \lambda)\phi' + k^2|\operatorname{rot}\vec{a}'|^2. \quad (4.1.6)$$

La famille $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (cf 3.1.1) est une base hilbertienne de $L^2(E_1)$ formée de vecteur propres pour H . Si

$$\phi' = \sum_{n=0}^{\infty} \mu'_n \phi_n, \quad (4.1.7)$$

alors cette forme quadratique peut s'exprimer sous la forme :

$$D_{(0,0)}^2 F_{\lambda,k}(\phi', \vec{a}') = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu'_n)^2 (2\pi + 4\pi n - \lambda) + k^2 \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}'|^2. \quad (4.1.8)$$

On sait que $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ équivaut à $\vec{a} = 0$ (cf 3.1.10). La différentielle seconde est donc non dégénérée si et seulement si $2\pi + 4\pi n - \lambda \neq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

La différentielle seconde est positive si et seulement si $2\pi + 4\pi n - \lambda > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), c'est à dire $\lambda < 2\pi$. **CQFD**

On va maintenant étudier ce qui se passe au voisinage de $\lambda = 2\pi$. Tous les calculs que nous effectuons sont pour (ϕ, \vec{a}) dans \mathcal{A} . Pour $k > 0$ fixé, on va montrer qu'il existe une courbe de couples $\lambda \mapsto (\phi(\lambda), \vec{a}(\lambda))$ solution des équations (3.3.21) qui ne soit pas C^∞ en 2π . Ces couples seront dits bifurqués et on dira qu'il y a une bifurcation en 2π .

Cette étude a été entreprise pour la première fois par Odeh dans [Od2]. Malheureusement ces premiers travaux souffrent d'un défaut de rigueur, aucun espace fonctionnel n'apparaissant très nettement dans la démonstration.

Dans la suite de cette section, on écrit

$$\begin{cases} \phi = \alpha \phi_0 + \theta \text{ où } \theta \in \phi_0^\perp \\ \lambda = \lambda_0 + \epsilon = 2\pi + \epsilon. \end{cases} \quad (4.1.9)$$

La valeur propre λ_0 vaut 2π et a été introduite au théorème 3.1.1. Puisque l'étude se fait au voisinage de $\lambda = \lambda_0$, on a isolé la composante sur ϕ_0 de ϕ . Dans notre cadre les physiciens appellent cette décomposition « l'approximation du premier niveau de Landau ». Dans d'autres contextes, c'est la méthode de Lyapunov-Schmidt (ou encore la méthode de projection de Feschbach, ou la méthode dite du problème de Grushin).

Remarque 4.1.2 . *Le paramètre α est a priori complexe, mais on voit facilement que l'on peut se ramener à l'étude du cas où α est réel, car si le couple (ϕ, \vec{a}) est solution des équations (3.3.21) et $\omega \in \mathbb{C}$ avec $|\omega| = 1$, alors le couple $(\omega\phi, \vec{a})$ est solution de la même équation. On parle d'action de S^1 laissant invariante la fonctionnelle. Si on prend α réel on obtiendra des solutions par paires car si (ϕ, \vec{a}) est solution alors $(-\phi, \vec{a})$ est aussi solution. Dans toute la suite de cette section, on supposera que α est réel.*

On va utiliser la méthode de Lyapunov-Schmidt qui consiste à transformer un problème de bifurcation de dimension infinie en un problème plus simple

de dimension finie en projetant sur des espaces adéquats. On cherchera alors à mettre en évidence l'existence de solutions (ϕ, \vec{a}) telles que $\phi \neq 0$. On cherche aussi à garder un contrôle sur k quand $k \rightarrow \infty$, on pose donc

$$\beta = \frac{1}{k} \quad (4.1.10)$$

et on réécrit les équations (3.3.21) avec β ; on obtient :

$$\begin{cases} [i\vec{\nabla} + \vec{A}_0 + \vec{a}]^2 \phi &= (\lambda - |\phi|^2)\phi, \\ -\text{rot}^* \text{rot } \vec{a} &= \beta^2 \text{Re}[\bar{\phi}(i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi)]. \end{cases} \quad (4.1.11)$$

Ci-dessous on effectue la réduction à la dimension finie.

Théorème 4.1.3 . Soit $\beta_0 > 0$ il existe un voisinage \mathcal{V} de $(0, 0, 0)$ dans $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$ de la forme

$$\begin{cases} \|\vec{a}\|_{H^1} < \delta, \\ \|\phi\|_{H^1(E_1)} < \delta \text{ et} \\ |\epsilon| < \delta \end{cases} \quad (4.1.12)$$

avec $\delta > 0$ tel que pour tout $\beta \in [-\beta_0, \beta_0]$, tout triplet $(\phi, \vec{a}, \epsilon)$ dans $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$ solution de l'équation (4.1.11) s'exprime sous la forme

$$\begin{cases} \phi &= \alpha\phi_0 + \Phi(\alpha, \epsilon, \beta), \\ \vec{a} &= \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta) \end{cases} \quad (4.1.13)$$

où Φ et $\vec{\Psi}$ sont des fonctions analytiques de α , ϵ et β où α est solution d'une équation

$$g(\alpha, \epsilon, \beta) = 0, \quad (4.1.14)$$

où g fonction analytique par rapport à α , ϵ et β est donnée en (4.1.31).

Ces fonctions vérifient $\Phi(0, 0, \beta) = 0$, $\vec{\Psi}(0, 0, \beta) = 0$ et $\langle \phi_0, \Phi(\alpha, \epsilon, \beta) \rangle = 0$.

Preuve. On pose

$$\begin{cases} F_\beta(\phi, \vec{a}) &= -\phi|\phi|^2 - 2\vec{a} \cdot (i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}_0\phi) - \vec{a}^2\phi, \\ G_\beta(\phi, \vec{a}) &= -\beta^2 \text{Re}[\bar{\phi}(i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi)]. \end{cases} \quad (4.1.15)$$

Les équations de Ginzburg-Landau (4.1.11) s'écrivent alors

$$\begin{cases} [H - \lambda]\phi &= F_\beta(\phi, \vec{a}), \\ L\vec{a} &= G_\beta(\phi, \vec{a}). \end{cases} \quad (4.1.16)$$

On réécrit ces équations dans la décomposition (4.1.9)

$$\begin{cases} -\epsilon\alpha\phi_0 + [H - \lambda_0]\theta - \epsilon\theta &= F_\beta(\alpha\phi_0 + \theta, \vec{a}), \\ L\vec{a} &= G_\beta(\alpha\phi_0 + \theta, \vec{a}). \end{cases} \quad (4.1.17)$$

Lemme 4.1.4 . *Il existe une application linéaire noté R_0 telle que*

$$\begin{aligned} R_0 &= (H - \lambda_0)^{-1} \quad \text{sur } \{\phi_0\}^\perp \\ &= 0 \quad \text{sur } \text{Vect } \{\phi_0\}. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

L'application R_0 est définie sur $L^2(E_1)$ et à valeur dans $H^2(E_1)$. Cette application est autoadjointe.

Par ailleurs $R_0[H - \lambda_0] = [H - \lambda_0]R_0 = P_0$ où P_0 est la projection orthogonale sur $\{\phi_0\}^\perp$.

Preuve. Si $\phi = \alpha\phi_0 + \theta$ avec $\theta \in \{\phi_0\}^\perp$ alors θ a un antécédent par $[H - \lambda_0]$ on a donc

$$R_0(\phi) = (H - \lambda_0)^{-1}\theta. \quad (4.1.19)$$

L'opérateur R_0 est à valeur dans $H^2(E_1)$ car R_0 est un opérateur elliptique d'ordre -2 . On projette sur ϕ_0^\perp la première équation et on utilise l'opérateur R_0 (cf (4.1.18)).

La nature autoadjointe de R_0 est évidente dans la base hilbertienne $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie au théorème 3.1.1.

La dernière assertion est triviale par l'équation (4.1.19). **CQFD**

On sait (cf 3.1.8) que l'opérateur L est inversible ; on note

$$M = L^{-1} \quad (4.1.20)$$

cet inverse qui est un opérateur d'ordre -2 . Puisque L est positif, l'opérateur M est aussi positif. L'opérateur M a pour espace de départ $L^2_{\text{div},0}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2)$ et pour image $H^2_{\text{div},0}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2)$.

On inverse les opérateurs L et $[H - \lambda_0]$ dans l'équation (4.1.17)

$$\begin{cases} \theta &= R_0[\epsilon\theta + F_\beta(\alpha\phi_0 + \theta, \vec{a})], \\ \vec{a} &= MG_\beta(\alpha\phi_0 + \theta, \vec{a}). \end{cases} \quad (4.1.21)$$

On note

$$w = \begin{pmatrix} \theta \\ \vec{a} \end{pmatrix} \quad (4.1.22)$$

et $N(w, \alpha, \epsilon, \beta)$ la fonction qui apparaît dans le second membre de l'équation (4.1.21)

$$N(w, \alpha, \epsilon, \beta) = \begin{pmatrix} R_0[\epsilon\theta + F_\beta(\alpha\phi_0 + \theta, \vec{a})] \\ MG_\beta(\alpha\phi_0 + \theta, \vec{a}) \end{pmatrix}. \quad (4.1.23)$$

Un triplet $(\alpha, \epsilon, \beta)$ étant donné et le paramètre β étant fixé dans un intervalle $[-\beta_0, \beta_0]$, on cherche donc pour trouver des solutions de l'équation de Ginzburg-Landau, à trouver une solution w dans \mathcal{A} telle que

$$w = N(w, \alpha, \epsilon, \beta). \quad (4.1.24)$$

Lemme 4.1.5 . *Si $\beta_0 > 0$ alors il existe un voisinage de $(w, \alpha, \epsilon) = (0, 0, 0)$ dans $(H^1(E_1) \cap \{\phi_0\}^\perp) \times H^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $\beta \in [-\beta_0, \beta_0]$, le système (4.1.21) admette une solution unique $w_s(\alpha, \epsilon, \beta)$ dans la classe H^1 . Cette solution est réelle analytique en α , ϵ et β . La solution obtenue est à valeur dans $(C^\infty(E_1) \cap \{\phi_0\}^\perp) \times C_{\text{div},0}^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2)$.*

Preuve.

1^{ère} étape :

On supposera toujours que $|\beta| \leq \beta_0$.

Nous allons montrer que la fonction N est C^∞ pour la topologie normique de l'espace $(H^1(E_1) \cap \{\phi_0\}^\perp) \times H^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$.

Le fait que N dépende de façon C^∞ de α , ϵ et β est évident.

Les termes $-\phi|\phi|^2$, $\vec{a}^2\phi$, $\vec{\phi}(\vec{A}_0 + \vec{a})\phi$ et $-2\vec{a} \cdot \vec{A}_0\phi$ appartiennent à L^2 ; donc leurs images par les opérateurs R_0 et M appartiennent à H^2 donc a fortiori à H^1 .

Il reste à prouver que les termes $R_0[\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\phi]$ et $M[\vec{\phi} \vec{\nabla}\phi]$ appartiennent à H^1 .

Le terme $\vec{\nabla}\phi$ appartient à L^2 tandis que le potentiel \vec{a} appartient à H^1 .

Donc une combinaison des estimées du théorème 2.2.3 et de l'inégalité de Hölder montre que $\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\phi$ appartient à $L^{\frac{3}{2}}$. Les estimées elliptiques 3.3.1

montrent que $R_0[\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\phi]$ appartient à $W_2^{\frac{3}{2}}$. Une deuxième application du théorème 2.2.3 montre que $R_0[\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\phi]$ appartient à W_1^6 donc à H^1 .

L'application N est donc bien à valeur dans

$$(H^1(E_1) \cap \{\phi_0\}^\perp) \times H_{\text{div},0}^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2). \quad (4.1.25)$$

Le fait que cette application soit en fait C^∞ sur l'espace

$$(H^1(E_1) \cap \{\phi_0\}^\perp) \times H_{\text{div},0}^1(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}; \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (4.1.26)$$

se montre de la même manière.

2^{eme} étape :

En utilisant le théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach, on montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\beta \in [-\beta_0, \beta_0]$, on ait dans la boule :

$$\|\theta\|_{H^1} + \|\vec{a}\|_{H^1} + |\alpha| + |\epsilon| < \delta \quad (4.1.27)$$

une solution unique des équations (4.1.21) qui dépende de façon C^∞ de α , ϵ et β .

On note cette solution

$$w_s(\alpha, \epsilon, \beta) = (\Phi(\alpha, \epsilon, \beta), \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta)). \quad (4.1.28)$$

Le théorème 3.3.10 permet de prouver que pour tout α , ϵ et β le couple $w_s(\alpha, \epsilon, \beta) \in \mathcal{A}$ est C^∞ sur \mathbb{R}^2/\mathcal{L} .

3^{eme} étape :

On suppose α réel et on développe le système (4.1.21). Ceci donne l'expression suivante

$$\begin{cases} \theta = R_0[\epsilon\theta - (\alpha\phi_0 + \theta)(\alpha^2|\phi_0|^2 + 2\alpha \operatorname{Re}[\bar{\phi}_0\theta] + |\theta|^2) \\ \quad - 2\vec{a} \cdot (i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)(\alpha\phi_0 + \theta) - \vec{a}^2(\alpha\phi_0 + \theta)], \\ \vec{a} = -\beta^2 M[(\alpha\bar{\phi}_0 + \bar{\theta})(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0 + \vec{a})(\alpha\phi_0 + \theta)]. \end{cases} \quad (4.1.29)$$

On peut alors considérer que les variables α , ϵ et β sont complexes et effectuer des calculs de fonctions analytiques par rapport à α , ϵ et β .

On calcule maintenant $(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\alpha})$ à partir du système complexifié (4.1.29)

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} &= P_{11}(\Phi, \vec{\Psi})\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + P_{12}(\Phi, \vec{\Psi})\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\alpha}, \\ \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\alpha} &= P_{21}(\Phi, \vec{\Psi})\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + P_{22}(\Phi, \vec{\Psi})\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\alpha}. \end{cases} \quad (4.1.30)$$

Les opérateurs P_{ij} sont continus pour la norme H^1 , dépendent continument de $(\alpha, \epsilon, \beta)$ et s'annulent pour $(\alpha, \epsilon) = (0, 0)$. Par conséquent, quitte à diminuer δ , on peut supposer que l'opérateur $(\delta_{ij} - P_{ij})$ est inversible.

L'inversion du système (4.1.30) donne l'égalité $(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\alpha}) = (0, \vec{0})$. On prouve le même résultat pour $(\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\epsilon}}, \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\bar{\epsilon}})$ et $(\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\beta}}, \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\bar{\beta}})$.

Les résultats élémentaires sur les fonctions analytiques permettent alors de montrer que $(\Phi, \vec{\Psi})$ sont analytiques en $(\alpha, \epsilon, \beta)$. **CQFD**

On obtient l'équation réduite à partir de l'équation (4.1.17) en projetant sur ϕ_0 . Cette équation s'écrit $g(\alpha, \epsilon, \beta) = 0$ où g est la fonction suivante

$$g(\alpha, \epsilon, \beta) = \epsilon\alpha + \langle \phi_0, F_\beta(\alpha\phi_0 + \Phi(\alpha, \epsilon, \beta), \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta)) \rangle. \quad (4.1.31)$$

Puisque les fonctions Φ et Ψ sont analytiques par rapport à α , ϵ et β la fonction g est analytique par rapport à ces variables.

Lemme 4.1.6 . *La fonction g est à valeur réelle.*

Preuve. Pour tout couple $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ on a

$$\langle \phi, F_\beta(\phi, \vec{a}) \rangle \in \mathbb{R} \quad (4.1.32)$$

En effet la fonction F_β définie à l'équation (4.1.15) peut s'écrire

$$F_\beta(\phi, \vec{a}) = -\phi|\phi|^2 + [i\vec{\nabla} + \vec{A}_0]^2\phi - [i\vec{\nabla} + \vec{A}_0 + \vec{a}]^2\phi. \quad (4.1.33)$$

Ceci nous donne

$$\langle \phi, F_\beta(\phi, \vec{a}) \rangle = -\|\phi^2\|_{L^2}^2 + \|i\vec{\nabla}\phi + \vec{A}_0\phi\|_{L^2}^2 - \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|_{L^2}^2. \quad (4.1.34)$$

Montrons maintenant que

$$\langle \theta, F_\beta(\alpha\phi_0 + \theta, \vec{a}) \rangle \in \mathbb{R} \quad (4.1.35)$$

si $\theta = \Phi(\alpha, \epsilon, \beta)$ et $\vec{a} = \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta)$.

La section θ vérifie l'équation

$$\theta = R_0[\epsilon\theta + F_\beta(\alpha\phi_0 + \theta, \vec{a})]. \quad (4.1.36)$$

On obtient donc en appliquant $[H - \lambda_0]$

$$[H - \lambda_0]\theta = P_0[\epsilon\theta + F_\beta(\alpha\phi_0 + \theta, \vec{a})] \quad (4.1.37)$$

où P_0 est la projection orthogonale sur $\{\phi_0\}^\perp$ (cf 4.1.4); cela nous donne puisque $\theta \in \{\phi_0\}^\perp$

$$\begin{aligned} \langle \theta, [H - \lambda_0]\theta \rangle &= \langle \theta, P_0[\epsilon\theta + F_\beta(\alpha\phi_0 + \theta, \vec{a})] \rangle \\ &= \langle \theta, \epsilon\theta + F_\beta(\alpha\phi_0 + \theta, \vec{a}) \rangle \\ &= \epsilon\|\theta\|_{L^2}^2 + \langle \theta, F_\beta(\alpha\phi_0 + \theta, \vec{a}) \rangle. \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

On a donc

$$\langle \theta, F_\beta(\alpha\phi_0 + \theta, \vec{a}) \rangle = \langle \theta, [H - \lambda_0]\theta \rangle - \epsilon \|\theta\|_{L^2}^2 \in \mathbb{R} \quad (4.1.39)$$

car $H - \lambda_0$ est un opérateur autoadjoint.

Puisque $\phi = \alpha\phi_0 + \theta$, on obtient

$$\langle F_\beta(\alpha\phi_0 + \Phi(\alpha, \epsilon, \beta), \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta)), \alpha\phi_0 \rangle \in \mathbb{R}. \quad (4.1.40)$$

La fonction g est donc réelle si α est différent de 0. Cette fonction est continue donc elle est toujours réelle. **CQFD**

Lemme 4.1.7 . La fonction Φ vérifie $\Phi(-\alpha, \epsilon, \beta) = -\Phi(\alpha, \epsilon, \beta)$.

La fonction $\vec{\Psi}$ vérifie $\vec{\Psi}(-\alpha, \epsilon, \beta) = \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta)$.

La fonction g vérifie $g(-\alpha, \epsilon, \beta) = -g(\alpha, \epsilon, \beta)$.

Preuve. Les fonctions Φ et $\vec{\Psi}$ vérifient les équations :

$$\begin{cases} \Phi(\alpha, \epsilon, \beta) &= R_0[\epsilon\Phi(\alpha, \epsilon, \beta) + F_\beta(\alpha\phi_0 + \Phi(\alpha, \epsilon, \beta), \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta))], \\ \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta) &= MG_\beta(\alpha\phi_0 + \Phi(\alpha, \epsilon, \beta), \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta)). \end{cases} \quad (4.1.41)$$

On obtient donc les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \Phi(-\alpha, \epsilon, \beta) &= R_0[\epsilon\Phi(-\alpha, \epsilon, \beta) \\ &\quad + F_\beta(-\alpha\phi_0 + \Phi(-\alpha, \epsilon, \beta), \vec{\Psi}(-\alpha, \epsilon, \beta))], \\ \vec{\Psi}(-\alpha, \epsilon, \beta) &= MG_\beta(-\alpha\phi_0 + \Phi(-\alpha, \epsilon, \beta), \vec{\Psi}(-\alpha, \epsilon, \beta)) \end{cases} \quad (4.1.42)$$

et

$$\begin{cases} -\Phi(\alpha, \epsilon, \beta) &= R_0[-\epsilon\Phi(\alpha, \epsilon, \beta) + F_\beta(-\alpha\phi_0 - \Phi(\alpha, \epsilon, \beta), \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta))], \\ \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta) &= MG_\beta(-\alpha\phi_0 - \Phi(\alpha, \epsilon, \beta), \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta)). \end{cases} \quad (4.1.43)$$

On a utilisé entre autre la propriété :

$$\begin{aligned} F_\beta(-\phi, \vec{a}) &= -F_\beta(\phi, \vec{a}), \\ G_\beta(-\phi, \vec{a}) &= G_\beta(\phi, \vec{a}). \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

Vu qu'il y a unicité des solutions localement, on obtient les relations :

$$\begin{cases} -\Phi(\alpha, \epsilon, \beta) &= \Phi(-\alpha, \epsilon, \beta), \\ \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta) &= \vec{\Psi}(-\alpha, \epsilon, \beta). \end{cases} \quad (4.1.45)$$

Le résultat sur g provient alors directement de l'expression (4.1.31) de g .
CQFD

Les fonctions $(\Phi, \vec{\Psi})$ vérifient les équations

$$\begin{cases} \Phi = R_0[\epsilon\Phi + F_\beta(\alpha\phi_0 + \Phi, \vec{\Psi})], \\ \vec{\Psi} = MG_\beta(\alpha\phi_0 + \Phi, \vec{\Psi}). \end{cases} \quad (4.1.46)$$

Si (α, ϵ) est solution de l'équation (4.1.14), alors la paire

$$\begin{pmatrix} \alpha\phi_0 + \Phi(\alpha, \epsilon, \beta) \\ \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta) \end{pmatrix} \quad (4.1.47)$$

est l'unique solution de l'équation (4.1.11) dans le voisinage

$$\|\theta\|_{H^1} + \|\vec{\alpha}\|_{H^1} + |\alpha| + |\epsilon| < \delta. \quad (4.1.48)$$

La fonction g est analytique en α , ϵ et β .

Dans la suite de la thèse, nous aurons besoin des constantes suivantes :

$$I_m = \int_{\Omega} |\phi_{0,m}|^4 dx dy \quad (4.1.49)$$

et

$$\begin{aligned} K_m &= \langle \text{Re}[\overline{\phi_{0,m}}(i\vec{\nabla}\phi_{0,m} + \vec{A}_0\phi_{0,m})], M\{\text{Re}[\overline{\phi_{0,m}}(i\vec{\nabla}\phi_{0,m} + \vec{A}_0\phi_{0,m})]\} \rangle \\ &= \text{Re}\langle M\{\text{Re}[\overline{\phi_{0,m}}(i\vec{\nabla}\phi_{0,m} + \vec{A}_0\phi_{0,m})]\} \cdot (i\vec{\nabla}\phi_{0,m} + \vec{A}_0\phi_{0,m}), \phi_{0,m} \rangle. \end{aligned} \quad (4.1.50)$$

Dans l'équation précédente, M est l'inverse de L . La section ϕ_0 est définie dans le théorème 3.1.1. Comme auparavant, si la dépendance de I ou K par rapport à $m \in \mathcal{M}$ (cf la section 2.5) est sans importance on omettra d'écrire m .

Lemme 4.1.8 . *Les constantes K et I sont strictement positives.*

Preuve. La section ϕ_0 est non identiquement nulle, par conséquent $\int_{\Omega} |\phi_0|^4$ est strictement positive.

L'opérateur M est défini positif, par conséquent K est positive. Supposons par l'absurde $K = 0$ on a alors puisque M est strictement positif

$$\text{Re}[\overline{\phi_{0,m}}(i\vec{\nabla}\phi_{0,m} + \vec{A}_0\phi_{0,m})] = 0. \quad (4.1.51)$$

Il suffit alors de reprendre la démonstration du lemme 3.4.9 à partir de l'équation (3.4.25).
CQFD

Hypothèse 4.1.9 . Dans toute la suite de la thèse on suppose que $I - 2\beta^2 K \neq 0$ ce qui s'écrit aussi $I - \frac{2}{k^2} K \neq 0$

Théorème 4.1.10 . Les solutions différentes de $(0, 0)$ du système (4.1.11) s'expriment sous la forme $(\omega\phi_+, \vec{a}_+)$ où $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$ et (ϕ_+, \vec{a}_+) est défini ci dessous :

$$(\phi_+, \vec{a}_+) = (\sqrt{W(\epsilon, \beta)}\phi_0 + \Phi(\sqrt{W(\epsilon, \beta)}, \epsilon, \beta), \vec{\Psi}(\sqrt{W(\epsilon, \beta)}, \epsilon, \beta)) \quad (4.1.52)$$

avec

$$W(\epsilon, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\epsilon}{I-2\beta^2 K} < 0 \\ D(\epsilon, \beta) & \text{si } \frac{\epsilon}{I-2\beta^2 K} > 0 \end{cases} \quad (4.1.53)$$

et $D(x, \beta)$ est une fonction analytique.

Remarque 4.1.11 . Si $I - \frac{2}{k^2} K > 0$ alors la bifurcation apparaît si $H_{int} < k$.

Preuve. On continue d'utiliser $\beta = \frac{1}{k}$. Pour déterminer la nature de cette bifurcation, on va calculer certaines dérivées partielles de g . L'identité $g(-\alpha, \epsilon, \beta) = -g(\alpha, \epsilon, \beta)$ obtenue au lemme 4.1.7 permet d'écrire g sous la forme

$$g(\alpha, \epsilon, \beta) = \alpha h(\alpha^2, \epsilon, \beta) \quad (4.1.54)$$

avec h fonction dépendant analytiquement de β , α et ϵ .

Pour montrer qu'il y a des solutions bifurquées, nous avons besoin de calculer les dérivées partielles premières de h par rapport aux deux premières variables encore notées α et ϵ . Si on montre que ces deux dérivées partielles sont non nulles le théorème des fonctions implicites pour les fonctions analytique (cf [Do], p. 186) nous donnera une expression de la forme $\alpha^2 = D(\epsilon, \beta)$ où $D(x, \beta)$ est une fonction analytique.

On a les relations

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \epsilon}(0, 0, \beta) = \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha \partial \epsilon}(0, 0, \beta), \\ \frac{\partial h}{\partial \alpha}(0, 0, \beta) = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g}{\partial \alpha^3}(0, 0, \beta). \end{cases} \quad (4.1.55)$$

Si on différencie les équations (4.1.46) par rapport à ϵ , α et que l'on évalue en $(\alpha, \epsilon, \beta) = (0, 0, \beta)$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(0, 0, \beta) = 0 & \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}(0, 0, \beta) = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}(0, 0, \beta) = 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon}(0, 0, \beta) = 0 \end{array} \right\}. \quad (4.1.56)$$

Ces relations impliquent, par l'expression de g et les formules (4.1.56), (4.1.54) et (4.1.31) :

$$\frac{\partial h}{\partial \epsilon}(0, 0, \beta) = 1. \quad (4.1.57)$$

Il faut maintenant dériver deux fois par rapport à α les équations (4.1.46) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}(0, 0, \beta) = 0 \\ \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial \alpha^2}(0, 0, \beta) = -2M[\beta^2 \operatorname{Re}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0)] \end{array} \right\}. \quad (4.1.58)$$

Cela suffit pour calculer la dérivée troisième de g par rapport à α . On commence d'abord par calculer la dérivée troisième de $F_\beta(\Phi(\alpha, \epsilon), \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta))$:

$$\left[\frac{\partial^3 F_\beta}{\partial \alpha^3}(\Phi(\alpha, \epsilon), \vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta)) \right](0, 0, \beta) = -6\phi_0|\phi_0|^2 - 6\frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial \alpha^2}(0, 0, \beta) \cdot (i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0. \quad (4.1.59)$$

En dérivant la fonction g par rapport à α et en évaluant en $(0, 0, \beta)$, on trouve :

$$\frac{\partial^3 g}{\partial \alpha^3}(0, 0, \beta) = -6I + 12\beta^2 R \quad (4.1.60)$$

avec $R = \langle M[\operatorname{Re}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0)] \cdot (i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0, \phi_0 \rangle$.

g et I étant réels, la quantité R est également réelle. Or on a les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \langle M[\operatorname{Re}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0)] \cdot (i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0, \phi_0 \rangle \\ = \int_\Omega M[\operatorname{Re}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0)] \cdot (i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0 \overline{\phi_0} \\ = \int_\Omega M[\operatorname{Re}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0)] \cdot \\ \quad [\operatorname{Re}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0) + i \operatorname{Im}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0)] \\ = K + \int_\Omega M[\operatorname{Re}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0)] \cdot [i \operatorname{Im}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0)] \\ = K + i \langle \operatorname{Im}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0), M[\operatorname{Re}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0)] \rangle. \end{array} \right. \quad (4.1.61)$$

La quantité R ne peut être réelle que si

$$\langle \operatorname{Im}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0), M[\operatorname{Re}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0)] \rangle = 0. \quad (4.1.62)$$

On a alors $R = K$ et donc :

$$\frac{\partial^3 g}{\partial \alpha^3} = -6I + 12\beta^2 K. \quad (4.1.63)$$

Ceci nous donne pour h :

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(0, 0, \beta) = -I + 2\beta^2 K. \quad (4.1.64)$$

On cherche maintenant les solutions de l'équation $g = 0$ dans un voisinage de $(0, 0, \beta)$.

L'équation (4.1.54) nous donne la racine $\alpha = 0$ de l'équation réduite.
On considère donc maintenant l'équation $h(x, \epsilon, \beta) = 0$. Le calcul des dérivées de g nous donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \alpha}(0, 0, \beta) &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g}{\partial \alpha^3}(0, 0, \beta) = -I + 2\beta^2 K, \\ \frac{\partial h}{\partial \epsilon}(0, 0, \beta) &= 1. \end{cases} \quad (4.1.65)$$

Si $I - 2\beta^2 K \neq 0$, alors on peut utiliser le théorème des fonctions implicites et écrire l'équation sous la forme :

$$\alpha^2 = D(\epsilon, \beta) \quad \text{avec} \quad \left(\frac{\partial D}{\partial \epsilon}\right)(0, \beta) = \frac{1}{I - 2\beta^2 K}, \quad (4.1.66)$$

où D est une fonction analytique de ϵ et β .

Les solutions de l'équation $g(\alpha, \epsilon, \beta) = 0$ ont pour expression

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, \\ \alpha_+ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\epsilon}{I - \frac{2}{k^2}K} < 0 \\ \sqrt{D(\epsilon, \beta)} & \text{si } \frac{\epsilon}{I - \frac{2}{k^2}K} > 0 \end{cases} \\ \text{et } \alpha_- &= -\alpha_+. \end{aligned} \quad (4.1.67)$$

Les différentes solutions ont le comportement asymptotique suivant quand $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, \\ \alpha_+ &\simeq \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\epsilon}{I - \frac{2}{k^2}K} < 0 \\ \sqrt{\frac{\epsilon}{I - 2\beta^2 K}} & \text{si } \frac{\epsilon}{I - \frac{2}{k^2}K} > 0 \end{cases} \\ \text{et } \alpha_- &= -\alpha_+. \end{aligned} \quad (4.1.68)$$

On obtient ainsi toutes les solutions non nulles sous la forme $(\omega\phi_+, \vec{a}_+)$.

CQFD

Dans les deux sections qui suivent l'expression ci-dessous sera appelée couple bifurqué

$$(\phi_+(\epsilon, k), \vec{a}_+(\epsilon, k)) = \begin{pmatrix} \sqrt{W(\epsilon, \beta)}\phi_0 + \Phi(\sqrt{W(\epsilon, \beta)}, \epsilon, \beta) \\ \vec{\Psi}(\sqrt{W(\epsilon, \beta)}, \epsilon, \beta) \end{pmatrix} \quad (4.1.69)$$

avec $\beta = \frac{1}{k}$. Ce couple vérifie : $\langle \phi_+(\epsilon, k), \phi_0 \rangle \geq 0$. On note aussi dans la suite

$$\alpha = \sqrt{W(\epsilon, \beta)}, \quad F_S(\epsilon, k) = F_{\lambda, k}(\phi_+(\epsilon, k), \vec{a}_+(\epsilon, k)). \quad (4.1.70)$$

La dépendance par rapport à β de α est analytique.

La question de l'analyticité, que nous avons résolue ici, avait été posée par Lasher dans l'article [La].

Proposition 4.1.12 . *La fonction $\epsilon \mapsto F_S(\epsilon, k)$ restreinte à \mathbb{R}_+ est analytique par rapport à ϵ*

Preuve. Dans le domaine considéré, la fonction $W(\epsilon, \beta)$ est analytique par rapport à ϵ . La fonction $\vec{\Psi}(\alpha, \epsilon, \beta)$ étant analytique par rapport à α (cf 4.1.3) et paire par rapport à α (cf 4.1.7), elle peut s'écrire sous la forme $\vec{\Psi}_i(\alpha^2, \epsilon, \beta)$. De même la fonction $\Phi(\alpha, \epsilon, \beta)$ peut s'écrire $\alpha\Phi_i(\alpha^2, \epsilon, \beta)$; on a

$$\begin{aligned} F_S(\epsilon, k) &= F_{\lambda, k}(\phi_+(\epsilon, k), \vec{a}_+(\epsilon, k)) \\ &= F_{\lambda, k}(\alpha[\phi_0 + \Phi_i(\alpha^2, \epsilon, \beta)], \vec{\Psi}_i(\alpha^2, \epsilon, \beta)) \end{aligned} \quad (4.1.71)$$

avec $\alpha = \sqrt{W(\epsilon, \beta)}$. En utilisant l'expression de $F_{\lambda, k}$ (cf (2.4.32)), on voit que la variable α apparaît au carré dans l'expression de $F_S(\epsilon, k)$.

La fonction $W(\epsilon, \beta)$ est analytique par rapport à ϵ et donc $F_S(\epsilon, k)$ est aussi analytique. **CQFD**

Proposition 4.1.13 . *Pour tout $m_0 \in \mathcal{M}$, il existe un voisinage compact \mathcal{V}_{m_0} de m_0 et une constante $\delta > 0$ tel que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall m \in \mathcal{V}_{m_0}, \\ \forall (\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}_m \text{ avec } \|\phi\|_{H^1} + \|\vec{a}\|_{H^1} \leq \delta \text{ et} \\ |\epsilon| \leq \delta \end{array} \right. \quad (4.1.72)$$

les équations de Ginzburg-Landau possèdent comme solution le couple $(0, 0, \beta)$ et les solutions bifurquées $(\omega\phi_{+,m}, \vec{a}_{+,m})$.

Dans ce voisinage on exprime les solutions bifurquées $(\omega\phi_{+,m}, \vec{a}_{+,m})$ sous la forme $(S_m^* \omega\phi_{+,c,m}, S_m^* \vec{a}_{+,c,m})$ (voir (2.5.15) et (2.5.10)) avec $(\omega\phi_{+,c,m}, \vec{a}_{+,c,m}) \in \mathcal{A}_c$ ou \mathcal{A}_c est l'espace fonctionnel associé au réseau carré. Le couple $(\phi_{+,c,m}, \vec{a}_{+,c,m})$, les fonctions $W_{m,k}(\epsilon)$, $g_{m,k}$, les constantes I_m , K_m et l'énergie bifurquée $F_{S,m}$ ont une dépendance C^∞ par rapport à m .

Preuve. Avec la représentation $(\phi, \vec{a}) = (S_m^* \phi_m, S_m^* \vec{a}_m)$, les équations de Ginzburg-Landau se réécrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_m \vec{a}_m = -\frac{1}{k^2} \operatorname{Re}[\overline{\phi_m}(i\vec{\nabla}\phi_m + (\vec{A}_{0,m} + \vec{a})\phi_m)] \\ \phi_m(\lambda - |\phi_m|^2) = -\Delta_m \phi_m + (S_m \vec{A}_{0,m} + S_m \vec{a}_m) \cdot i S_m \vec{\nabla} \phi_m \\ + \|S_m \vec{A}_{0,m} + S_m \vec{a}_m\|^2 \phi_m \end{array} \right. , \quad (4.1.73)$$

avec

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_{0,m}}(x, y) &= S_m^{-1} \overrightarrow{A_0}(S_m^{-1}(x, y)) \\ \Delta_m &= (\frac{1}{u^2} + w^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2wu \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + u^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (4.1.74)$$

La dépendance de ces équations par rapport à u et w est C^∞ . Tous les résultats de cette section peuvent s'exprimer dans l'espace \mathcal{A}_c grâce à S_m . Par le théorème des fonctions implicites, la dépendance des solutions $(\Phi_m, \overrightarrow{\Psi}_m)$ par rapport à m est C^∞ .

La dépendance de $g_{m,k}$ est aussi C^∞ . Par conséquent h_m et W_m est aussi C^∞ par rapport à m . Les constantes I_m et K_m sont C^∞ par rapport à m . L'énergie bifurquée F_S est aussi C^∞ par rapport à m . **CQFD**

4.2 Évaluation des énergies sur les différentes courbes de couples pour $H_{int} < k$

On souhaite estimer l'énergie le long de la courbe bifurquée par rapport à H_{int} pour voir si elle est plus basse que celle du couple $(0, 0)$. La variable utilisée ici est comme auparavant

$$\epsilon = \lambda - \lambda_0. \quad (4.2.1)$$

On utilise la fonctionnelle simplifiée (2.4.32) qui s'écrit

$$F_{\lambda,k}(\phi, \overrightarrow{a}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|i \overrightarrow{\nabla} \phi + (\overrightarrow{A_0} + \overrightarrow{a}) \phi\|^2 + \frac{1}{4} (\lambda - |\phi|^2)^2 + \frac{k^2}{2} |\text{rot } \overrightarrow{a}|^2. \quad (4.2.2)$$

Pour le couple $(\phi, \overrightarrow{a}) = (0, \overrightarrow{0})$, l'énergie vaut $F_N = \frac{\lambda^2}{4}$.

On note

$$\begin{cases} F_S(\epsilon, k) = F_{\lambda,k}(\phi_+(\epsilon, k), \overrightarrow{a}_+(\epsilon, k)), \\ F_N(\epsilon, k) = F_{\lambda,k}(0, 0) = \frac{\lambda^2}{4}. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Le couple bifurqué $(\phi_+, \overrightarrow{a}_+)$ est défini au théorème 4.1.10.

Dans cette section, on va calculer la différence d'énergie $F_S - F_N$ le long de la courbe de bifurcation.

Avant d'étudier notre situation réelle, considérons une situation modèle qui met bien en évidence la nature de la question. La fonctionnelle réduite modèle est la suivante

$$I(\alpha, \epsilon) = \frac{1}{4} I \alpha^4 - \frac{1}{2} \alpha^2 \epsilon + H(\epsilon) \text{ avec } I > 0. \quad (4.2.4)$$

Le paramètre ϵ est lié au champ magnétique et est imposé au système (voir l'équation (4.2.1)). La minimisation se fait par rapport à α . La fonction $H(\epsilon)$ est obtenue par intégration et n'a aucune importance dans le calcul des couples minimisants la fonctionnelle.

Ses solutions bifurquées sont

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm} : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ \epsilon &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon \leq 0 \\ \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{I}} & \text{si } \epsilon > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Leur énergie minimale est

$$\begin{aligned} I_m : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ \epsilon &\mapsto I(\alpha_{\pm}(\epsilon), \epsilon) = \begin{cases} H(\epsilon) & \text{si } \epsilon \leq 0 \\ H(\epsilon) - \frac{\epsilon^2}{4I} & \text{si } \epsilon > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

et elles sont trivialement stables.

Nous allons voir dans cette section et dans la suivante dans quelle mesure notre fonctionnelle a les mêmes propriétés.

Théorème 4.2.1 . *On a le résultat asymptotique*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0, \frac{\epsilon}{I - \frac{2}{k^2}K} > 0} \frac{(F_S - F_N)(\epsilon, k)}{\epsilon^2} = -\frac{1}{4(I - \frac{2}{k^2}K)} \quad (4.2.7)$$

avec K défini à l'équation (4.1.50) et I défini à l'équation (4.1.49).

Preuve. Pour la fonctionnelle modèle et $\epsilon > 0$ on a $I_{min} = I(\sqrt{\frac{\epsilon}{I}}, \epsilon) = H(\epsilon) - \frac{\epsilon^2}{4I}$. Ceci indique que l'on doit faire les calculs à l'ordre deux en ϵ pour la fonctionnelle exacte. Soit $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ une solution des équations de Ginzburg-Landau (3.3.21); on a :

$$\begin{aligned} F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) - F_{\lambda,k}(0, 0) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 \\ &+ \frac{1}{4} \int_{\Omega} -2\lambda|\phi|^2 + |\phi|^4 + \frac{k^2}{2} \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Utilisons maintenant que (ϕ, \vec{a}) est solution de l'équation (3.3.21); on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 &= \langle [i\vec{\nabla} + (\vec{A}_0 + \vec{a})]\phi, [i\vec{\nabla} + (\vec{A}_0 + \vec{a})]\phi \rangle \\ &= \langle [i\vec{\nabla} + (\vec{A}_0 + \vec{a})]^2 \phi, \phi \rangle \\ &= \langle \phi(\lambda - |\phi|^2), \phi \rangle \\ &= \int_{\Omega} (\lambda|\phi|^2 - |\phi|^4) dx dy. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

On en déduit que :

$$F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) - F_{\lambda,k}(0, 0) = -\frac{1}{4} \int_{\Omega} |\phi|^4 + \frac{k^2}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2, \quad (4.2.10)$$

pour toute solution (ϕ, \vec{a}) de l'équation de Ginzburg-Landau (3.3.21).
Considérons maintenant la solution (ϕ_+, \vec{a}_+) et calculons le développement de $(F_S - F_N)$ en fonction de ϵ . Il faut donc des dérivées de

$$\Phi, \vec{\Psi} \text{ et } \alpha \quad (4.2.11)$$

fonctions qui sont définies aux équations (4.1.28) et (4.1.70).

On écrit le développement limité de g tel qu'on le connaît depuis le théorème 4.1.10

$$g(\alpha, \epsilon, \frac{1}{k}) = \alpha \{ \epsilon - [I - \frac{2}{k^2}K] \alpha^2 + J \alpha^4 + o(\epsilon \alpha^2) + o(\alpha^4) \}, \quad (4.2.12)$$

où J est une constante réelle.

Ce calcul permet d'obtenir le développement de α en fonction de ϵ à l'ordre $\frac{3}{2}$. On écrit ci-dessous les différents développements limités utilisés. On les démontre en utilisant la formule de Taylor-Young pour les fonctions à valeur vectorielle et les calculs du théorème 4.1.10, plus précisément les formules (4.1.56) et (4.1.58) .

$$\begin{cases} \alpha &= \sqrt{\frac{\epsilon}{I - \frac{2}{k^2}K}} (1 + \frac{J\epsilon}{2I^2} + O(\epsilon^2)) \\ \Phi(\epsilon) &= O(|\epsilon|^{3/2}) \\ \vec{\Psi}(\epsilon) &= \frac{-\epsilon}{Ik^2 - 2K} M[\operatorname{Re}(\vec{\phi}_0(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0)] + O(\epsilon^2). \end{cases} \quad (4.2.13)$$

On insère tous ces développements dans la différence d'énergie. Le développement limité de l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} (F_S - F_N)(\epsilon, k) &= -\frac{1}{4} \alpha^4 \int_{\Omega} |\phi_0|^4 + \frac{k^2}{2} \alpha^4 \frac{1}{k^4} K + o(\epsilon^2) \\ &= \frac{\epsilon^2}{(I - \frac{2}{k^2}K)^2} [-\frac{1}{4}I + \frac{K}{2k^2}] + o(\epsilon^2) \\ &= -\frac{1}{4(I - \frac{2}{k^2}K)} \epsilon^2 + o(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Le résultat du calcul est donc bien (4.2.7) :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0, \frac{\epsilon}{I - \frac{2}{k^2}K} > 0} \frac{(F_S - F_N)(\epsilon, k)}{\epsilon^2} = -\frac{1}{4(I - \frac{2}{k^2}K)}. \quad (4.2.15)$$

On a donc bien $F_S - F_N < 0$, si ϵ est strictement positif et est assez petit. Ceci montre que le couple bifurqué trouvé est d'énergie plus basse que le couple $(0, 0)$. **CQFD**

On note, pour $I \neq \frac{2K}{k^2}$

$$F_{as} = -\frac{1}{4(I - \frac{2}{k^2}K)}. \quad (4.2.16)$$

Corollaire 4.2.2 . *On suppose $k > \sqrt{\frac{2K}{I}}$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que si $0 < \epsilon < \epsilon_0$ alors le couple bifurqué est d'énergie plus basse que celle du couple $(0, 0)$. Pour le problème réduit, cela signifie qu'il existe $H_0 < k$ tel que, si $H_0 < H_{int} < k$, alors l'énergie du couple bifurqué est plus basse que celle du couple $(0, 0)$.*

Proposition 4.2.3 . *Les fonctions sur $\mathcal{M} : m \mapsto F_{S,m}(\epsilon), F_{as,m}, I_m$ et K_m sont invariantes par les transformations σ_i sur \mathcal{M} . De plus, elles sont critiques pour le réseau carré et le réseau hexagonal.*

Preuve. Montrons que la fonction F_S est invariante par σ_i . Les fonctions Σ_i^* sont bijectives, involutives et continues pour la norme H^1 . Par conséquent, un voisinage de $(0, 0)$ est envoyé sur un voisinage de $(0, 0)$.

Ce sont des difféomorphismes donc si (ϕ, \vec{a}) est un point critique de $F_{\lambda,k}$ sur \mathcal{A}_m alors $(\Sigma_i^*\phi, \Sigma_i^*\vec{a})$ est un point critique de $F_{\lambda,k}$ sur $\mathcal{A}_{\sigma_i(m)}$.

Par conséquent, si $(\phi_{+,m}, \vec{a}_{+,m})$ est le couple bifurqué pour $F_{\lambda,k}$ sur \mathcal{A}_m alors $(\Sigma_i^*\phi_{+,m}, \Sigma_i^*\vec{a}_{+,m})$ est un point critique de $F_{\lambda,k}$ sur $\mathcal{A}_{\sigma_i(m)}$.

Vu le théorème 4.1.10, il existe ω de module 1 tel que

$$(\Sigma_i^*\phi_{+,m}, \Sigma_i^*\vec{a}_{+,m}) = (\omega\phi_{+,\sigma_i(m)}, \vec{a}_{+,\sigma_i(m)}). \quad (4.2.17)$$

On obtient alors la relation

$$\begin{aligned} F_{S,m} &= F_{\lambda,k}(\phi_{+,m}, \vec{a}_{+,m}) \\ &= F_{\lambda,k}(\Sigma_i^*\phi_{+,m}, \Sigma_i^*\vec{a}_{+,m}) \\ &= F_{\lambda,k}(\omega\phi_{+,\sigma_i(m)}, \vec{a}_{+,\sigma_i(m)}) \\ &= F_{\lambda,k}(\phi_{+,\sigma_i(m)}, \vec{a}_{+,\sigma_i(m)}) \\ &= F_{S,\sigma_i(m)}. \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

La fonction F_S est donc invariante par σ_i .

La fonction $F_{as}(m, k)$ est limite simple de fonctions invariantes et est donc invariante.

La fonction $F_{as}(m, k)$ est invariante pour tout $k > \sqrt{\frac{2K}{I}}$. Vu l'expression de F_{as} , cela ne peut se faire que si K_m et I_m sont invariants. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème 2.5.17. CQFD

4.3 Stabilité du couple bifurqué

Dans cette section, on s'intéresse au problème de la stabilité locale des solutions bifurquées.

Théorème 4.3.1 . Si $k > \sqrt{\frac{2K}{I}}$ alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, si $0 < \epsilon < \epsilon_0$, alors le couple bifurqué défini au théorème 4.1.3 est un minimum local de la fonctionnelle $F_{\lambda, k}$.

Si $k < \sqrt{\frac{2K}{I}}$, alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, si $0 < -\epsilon < \epsilon_0$, le couple bifurqué défini au théorème 4.1.3 n'est pas un minimum local de la fonctionnelle $F_{\lambda, k}$.

Remarque 4.3.2 On trouve des études physiques de stabilité dans [Al1] et [Chap]. Ces études utilisent des développements en série et ne se limitent pas à une quantification de 1 comme nous.

Preuve. Pour traiter tous les cas d'un seul coup, on utilise la fraction

$$\frac{\epsilon}{I - \frac{2}{k^2}K} \quad (4.3.1)$$

qui est toujours positive.

Pour prouver des propriétés de minimum local, il suffit de prouver que la différentielle seconde est définie positive sur le couple bifurqué $(\phi_+, \vec{a}_+) \in \mathcal{A}$ défini à l'équation (4.1.69).

La différentielle seconde de la fonctionnelle calculée au point (ϕ, \vec{a}) a pour expression

$$\begin{aligned} D_{\phi, \vec{a}}^2 F_{\lambda, k}(\delta\phi, \vec{\delta a}) &= \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\delta\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\delta\phi\|^2 - \int_{\Omega} (\lambda - |\phi|^2)^2 |\delta\phi|^2 \\ &+ 4 \int_{\Omega} \vec{\delta a} \cdot \text{Re}[\vec{\delta\phi}(i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi)] \\ &+ k^2 \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{\delta a}|^2 + \int_{\Omega} (\vec{\delta a})^2 |\phi|^2 + 2 \int_{\Omega} (\text{Re } \vec{\phi} \delta\phi)^2. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

On a utilisé ici la relation :

$$\int_{\Omega} \text{Re}[\vec{\phi}(i\vec{\nabla}\phi' + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi')] = \int_{\Omega} \text{Re}[\vec{\phi}'(i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi)], \quad (4.3.3)$$

qui est vraie si ϕ , ϕ' et \vec{a} sont de classe H^1 et que l'on obtient par intégration par parties.

Dans la suite on abrégera $D^2_{\phi_+, \vec{a}_+} F_{\lambda, k}(\delta\phi, \vec{\delta a})$ en $D^2 F$.

Si $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ est un point critique de la fonctionnelle $F_{\lambda, k}$, alors on a le développement limité

$$F_{\lambda, k}(\phi + \delta\phi, \vec{a} + \vec{\delta a}) = F_{\lambda, k}(\phi, \vec{a}) + \frac{1}{2} D^2_{\phi, \vec{a}} F_{\lambda, k}(\delta\phi, \vec{\delta a}) + O(\|(\delta\phi, \vec{\delta a})\|_{H^1})^3. \quad (4.3.4)$$

Comme dans la section 4.1, on écrira :

$$\begin{cases} \phi_+ &= \alpha\phi_0 + \Phi, \\ \vec{a}_+ &= \vec{\Psi}. \end{cases} \quad (4.3.5)$$

On rappelle que l'on a montré que $\alpha = O(\sqrt{\epsilon})$, $\|\Phi\|_{H^1} = O(\epsilon^{\frac{3}{2}})$ et $\|\vec{\Psi}\|_{H^1} = O(\epsilon)$. Voir l'équation (4.2.13) pour plus de détails.

On écrit

$$\delta\phi = \sqrt{\frac{I - \frac{2}{k^2}K}{\epsilon}} \mu\phi_0 + w \quad (4.3.6)$$

avec $w \in \phi_0^\perp$ et $\mu \in \mathbb{R}$. La variable μ est réelle puisque l'on se limite à des sections telles que $\langle \phi, \phi_0 \rangle$ est réel, voir la remarque 4.1.2.

On évalue d'abord la partie de la forme (4.3.2) qui ne dépend que de $\delta\phi$:

$$Q(\delta\phi) = \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\delta\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a}_+) \delta\phi\|^2 - (\lambda - |\phi_+|^2) |\delta\phi|^2 + 2(\operatorname{Re} \overline{\phi_+} \delta\phi)^2. \quad (4.3.7)$$

On développe $Q(\delta\phi)$

$$\begin{aligned} Q(\delta\phi) &= \frac{2\pi - \lambda}{\epsilon} [I - \frac{2}{k^2}K] \mu^2 + \langle ([i\vec{\nabla} + \vec{A}_0]^2 - \lambda)w, w \rangle \\ &+ 2\operatorname{Re} \langle \vec{\Psi} \cdot (i\vec{\nabla} + \vec{A}_0) \delta\phi, \delta\phi \rangle + \langle \vec{\Psi}^2 \delta\phi, \delta\phi \rangle \\ &+ \int_{\Omega} |\phi_+|^2 |\delta\phi|^2 + 2 \int_{\Omega} (\operatorname{Re} \overline{\phi_+} \delta\phi)^2. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

On estime l'avant dernier terme de l'équation (4.3.8)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\phi_+|^2 |\delta\phi|^2 &= \int_{\Omega} |\alpha\phi_0 + \Phi|^2 |\mu\phi_0 + w|^2 \\ &= I\mu^2 + \epsilon^{\frac{1}{2}} \{ \|w\|_{L^2} |\mu| O(1) + \|w\|_{L^2}^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) + \mu^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \}. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

On trouve la même estimation pour le dernier terme de l'équation (4.3.8) :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{Re} \overline{\phi_+} \delta\phi)^2 = I\mu^2 + \epsilon^{\frac{1}{2}} \{ \|w\|_{L^2} |\mu| O(1) + \|w\|_{L^2}^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) + \mu^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \}. \quad (4.3.10)$$

Dans l'estimation qui suit, on isole les termes d'ordre inférieur à 1 en ϵ .

$$\begin{aligned}
Q(\delta\phi) &= \langle ([i\vec{\nabla} + \vec{A}_0]^2 - \lambda)w, w \rangle + 3I\mu^2 \\
&- \frac{2\epsilon}{Ik^2 - 2K} \operatorname{Re} \langle M[\operatorname{Re}(\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0)] \cdot (i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\delta\phi, \delta\phi \rangle \\
&+ \epsilon^{\frac{1}{2}} \{ \|w\|_{L^2} |\mu| O(1) + \|w\|_{L^2}^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) + \mu^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \} \\
&= \langle ([i\vec{\nabla} + \vec{A}_0]^2 - \lambda)w, w \rangle + \mu^2 [3I - \frac{2}{k^2}K] \\
&+ \epsilon^{\frac{1}{2}} \{ \|w\|_{L^2} |\mu| O(1) + \|w\|_{L^2}^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) + \mu^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \}.
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Reprenons l'estimation de la variation seconde de l'énergie en introduisant les développements en ϵ de ϕ et \vec{a} . On a ; pour $(D^2F)(\delta\phi, \vec{\delta a})$:

$$\begin{aligned}
D^2F &= \int_{\Omega} \vec{\delta a} \cdot 4 \operatorname{Re}[\overline{\delta\phi}(i\vec{\nabla} + (\vec{A}_0 + \vec{a}_+))\phi_+] + k^2 \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{\delta a}|^2 \\
&+ \langle ([i\vec{\nabla} + \vec{A}_0]^2 - \lambda)w, w \rangle + \mu^2 [3I - \frac{2}{k^2}K] + \int_{\Omega} (\vec{\delta a})^2 |\phi_+|^2 \\
&+ \epsilon^{\frac{1}{2}} \{ \|w\|_{L^2} |\mu| O(1) + \|w\|_{L^2}^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) + \mu^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \} \\
&= 4\mu \int_{\Omega} \vec{\delta a} \cdot \operatorname{Re}[\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0] + k^2 \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{\delta a}|^2 \\
&+ \langle ([i\vec{\nabla} + \vec{A}_0]^2 - \lambda)w, w \rangle + \mu^2 [3I - \frac{2}{k^2}K] + \|\vec{\delta a}\|_{L^2}^2 O(\epsilon) \\
&+ \|\vec{\delta a}\|_{L^2} O(|\epsilon|)(|\mu| + \epsilon^{\frac{1}{2}}\|w\|_{L^2}) + \|\vec{\delta a}\|_{L^2} O(|\epsilon|^{\frac{1}{2}})\|w\|_{L^2} \\
&+ \epsilon^{\frac{1}{2}} \{ \|w\|_{L^2} |\mu| O(1) + \|w\|_{L^2}^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) + \mu^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \}.
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Le terme de degré 1 en $\vec{\delta a}$ est difficile à minorer. C'est là que des conditions sur k vont apparaître. L'opérateur M (cf (4.1.20)) étant positif, il existe W tel que $M = W^2$, on pose

$$\vec{\delta a} = W(\vec{\delta c}) \tag{4.3.13}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}
D^2F &= \mu^2 [3I - \frac{2}{k^2}K] + k^2 \int_{\Omega} \|\vec{\delta c}\|^2 + \langle ([i\vec{\nabla} + \vec{A}_0]^2 - \lambda)w, w \rangle \\
&+ 4\mu \int_{\Omega} W(\vec{\delta c}) \cdot \operatorname{Re}[\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0] \\
&+ \|\vec{\delta c}\|_{H^{-1}} O(|\epsilon|)(|\mu| + \epsilon^{\frac{1}{2}}\|w\|_{L^2}) + \|\vec{\delta c}\|_{H^{-1}} O(|\epsilon|^{\frac{1}{2}})\|w\|_{L^2} \\
&+ \|\vec{\delta c}\|_{H^{-1}}^2 O(\epsilon) + \epsilon^{\frac{1}{2}} \{ \|w\|_{L^2} |\mu| O(1) + \|w\|_{L^2}^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) + \mu^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \}.
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

On estime maintenant chaque terme

$$\begin{aligned}
D^2F &= \mu^2[3I - \frac{2}{k^2}K] + k^2\|\vec{\delta c}\|_{L^2}^2 + \langle ([i\vec{\nabla} + \vec{A}_0]^2 - \lambda)w, w \rangle \\
&+ 4\mu \int_{\Omega} W(\vec{\delta c}) \cdot \text{Re}[\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0] \\
&+ \epsilon^{\frac{1}{2}}\{\|\vec{\delta c}\|_{L^2}^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) + \|\vec{\delta c}\|_{L^2} O(1)(|\mu| + \|w\|_{L^2}) \\
&+ \mu^2 O(\epsilon^{\frac{3}{2}}) + \|w\|_{L^2} |\mu| O(1) + \|w\|_{L^2}^2 O(\epsilon^{\frac{1}{2}})\}.
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

On a utilisé le fait que l'opérateur W est continu sur L^2 .

On estime le terme linéaire en $W(\vec{\delta c})$.

$$\begin{aligned}
|\langle W(\vec{\delta c}), \text{Re}[\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0] \rangle| &= |\langle \vec{\delta c}, W(\text{Re}[\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0]) \rangle| \\
&\leq \|\vec{\delta c}\|_{L^2} \cdot \|W(\text{Re}[\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0])\|_{L^2} \\
&\leq \sqrt{K} \|\vec{\delta c}\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Pour avoir la stabilité, on veut que la forme quadratique :

$$q(x, y) = [3I - \frac{2}{k^2}K]x^2 - 4\sqrt{K}xy + k^2y^2, \tag{4.3.17}$$

soit définie positive. Cela équivaut à :

$$\begin{cases} k^2 > 0, \\ (2\sqrt{K})^2 < [3I - \frac{2K}{k^2}][k^2]. \end{cases} \tag{4.3.18}$$

Les conditions (4.3.18) sont équivalentes à $\sqrt{\frac{2K}{I}} < k$.

Si $\sqrt{\frac{2K}{I}} < k$, alors la forme quadratique (4.3.17) est définie positive ; donc il existe $c > 0$, $d > 0$ et $f > 0$ tel que les deux premières lignes de (4.3.15) soient minorées par le terme :

$$c\mu^2 + d\|w\|_{H^1}^2 + f\|\vec{\delta c}\|_{L^2}^2. \tag{4.3.19}$$

Le terme entre accolades des deux dernières lignes de (4.3.15) est majoré par une constante multipliée par (4.3.19). Donc pour ϵ assez petit, la différentielle seconde $D^2F(\delta\phi, \vec{\delta a})$ est minorée par une forme quadratique définie positive et est donc positive. Par conséquent ce couple est stable.

Nous pouvons démontrer maintenant l'autre partie du théorème 4.3.1, qui concerne le cas $\sqrt{\frac{2K}{I}} > k$.

La majoration effectuée à l'équation (4.3.16) est optimale, puisque la norme d'une application linéaire sur un espace de Hilbert de la forme $l(x) = \langle x, b \rangle$ est égale à $\|b\|$ et est atteinte sur b .

On souhaite montrer que $D^2F(\delta\phi, \vec{\delta a})$ n'est pas positive pour les solutions bifurquées, il suffit donc de trouver un couple $(\delta\phi, \vec{\delta a})$ tel que $D^2F(\delta\phi, \vec{\delta a}) < 0$ pour démontrer le théorème.

On pose donc

$$\begin{cases} \vec{\delta a}_0 = \text{Re}[\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0], \\ \vec{\delta c}_0 = W(\text{Re}[\overline{\phi_0}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi_0]). \end{cases} \quad (4.3.20)$$

On évalue maintenant la fonctionnelle sur un couple bien choisi

$$\begin{aligned} D^2F(\mu \sqrt{\frac{\epsilon}{I - \frac{2}{k^2}K}} \phi_0, s\vec{\delta a}_0) &= \mu^2[3I - \frac{2}{k^2}K] + \mu^2 O(\epsilon^2) \\ &+ 4\mu s \|\vec{\delta c}_0\|_{L^2} + s^2 k^2 \|\vec{\delta c}_0\|_{L^2}^2 \\ &= \mu^2[3I - \frac{2}{k^2}K + O(\epsilon)] \\ &+ 4\mu s \|\vec{\delta c}_0\|_{L^2} + s^2 k^2 \|\vec{\delta c}_0\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Les conditions de positivité pour la forme quadratique (4.3.21) s'écrivent

$$\begin{cases} [3I - \frac{2}{k^2}K + O(\epsilon)] > 0 \\ (2\sqrt{K})^2 < [3I - \frac{2}{k^2}K + O(\epsilon)][k^2] \end{cases} \quad (4.3.22)$$

et elles ne sont pas vérifiées si ϵ est assez petit puisque $\sqrt{\frac{2K}{I}} > k$. **CQFD**

4.4 Analyse asymptotique des solutions de l'équation de Ginzburg-Landau

Dans cette section, on calcule toutes les solutions des équations de Ginzburg-Landau

$$\begin{cases} [i\vec{\nabla} + (\vec{A}_0 + \vec{a})]^2 \phi &= \phi(\lambda - |\phi|^2) \\ -L\vec{a} &= \frac{1}{k^2} \text{Re}[\overline{\phi}(i\vec{\nabla} \phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi)] \end{cases} \quad (4.4.1)$$

en supposant que $\lambda \in [0, 2\pi + \delta_0[$ avec δ_0 assez petit et k assez grand.

Lemme 4.4.1 . *Si $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ vérifie les équations de Ginzburg-Landau (3.3.21) pour λ, k donnés, alors :*

$$\|\Delta \vec{a}\|_{L^2}^2 \leq \frac{\lambda^3}{4k^2}. \quad (4.4.2)$$

Preuve. On se rappelle que $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ et on calcule

$$\begin{aligned} \|\Delta \vec{a}\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} \|\Delta \vec{a}\|^2 \\ &= \int_{\Omega} \|\operatorname{rot}^* \operatorname{rot} \vec{a}\|^2 \\ &= \frac{1}{k^4} \int_{\Omega} \|\operatorname{Re}[\bar{\phi}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0 + \vec{a})\phi]\|^2, \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

en utilisant la deuxième équation de GL. On continue à majorer :

$$\begin{aligned} \|\Delta \vec{a}\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{k^4} \int_{\Omega} \|\bar{\phi}(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 \\ &\leq \frac{\lambda}{k^4} \int_{\Omega} \|(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2, \text{ en utilisant l'inégalité (3.4.8)} \\ &\leq \frac{\lambda}{k^4} \langle (i\vec{\nabla} + \vec{A}_0 + \vec{a})\phi, (i\vec{\nabla} + \vec{A}_0 + \vec{a})\phi \rangle \\ &\leq \frac{\lambda}{k^4} \langle [i\vec{\nabla} + \vec{A}_0 + \vec{a}]^2 \phi, \phi \rangle \\ &\leq \frac{\lambda}{k^4} \langle \phi(\lambda - |\phi|^2), \phi \rangle \text{ en utilisant la première équation de GL} \\ &\leq \frac{\lambda}{k^4} \int_{\Omega} |\phi|^2(\lambda - |\phi|^2) \\ &\leq \frac{\lambda}{k^4} \frac{\lambda^2}{4} = \frac{\lambda^3}{4k^4}. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

A la fin, on a utilisé l'égalité $\sup_{x \in [0, \lambda]} x(\lambda - x) = \frac{\lambda^2}{4}$ et $0 \leq |\phi|^2 \leq \lambda$. **CQFD**

Lemme 4.4.2 . Si $\vec{a} \in L^\infty$, alors le niveau fondamental de l'opérateur

$$[i\vec{\nabla} + (\vec{A}_0 + \vec{a})]^2 \quad (4.4.5)$$

est minoré par

$$2\pi(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \|\vec{a}\|_{L^\infty}). \quad (4.4.6)$$

Preuve. L'opérateur H défini à l'équation (3.1.3) a un niveau fondamental égal à 2π . Cela nous donne

$$\|\phi\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \langle H\phi, \phi \rangle. \quad (4.4.7)$$

On fait alors le calcul suivant

$$\begin{aligned} |\langle \vec{a} \phi, (i\vec{\nabla} \phi + \vec{A}_0 \phi) \rangle| &\leq \|\vec{a}\|_{L^\infty} \int_{\Omega} |\phi| \|i\vec{\nabla} \phi + \vec{A}_0 \phi\| \\ &\leq \|\vec{a}\|_{L^\infty} \|\phi\|_{L^2} \sqrt{\int_{\Omega} \|i\vec{\nabla} \phi + \vec{A}_0 \phi\|^2} \\ &\leq \|\vec{a}\|_{L^\infty} \|\phi\|_{L^2} \sqrt{\langle H\phi, \phi \rangle} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\vec{a}\|_{L^\infty} \langle H\phi, \phi \rangle. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Ceci permet de minorer la première valeur propre de l'opérateur de Schrödinger magnétique

$$\begin{aligned}
\langle [i\nabla + \vec{A}_0 + \vec{a}]^2 \phi, \phi \rangle &\geq \langle H\phi, \phi \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle \vec{a} \phi, (i\nabla + \vec{A}_0) \phi \rangle \\
&\geq \langle H\phi, \phi \rangle - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \|\vec{a}\|_{L^\infty} \langle H\phi, \phi \rangle \\
&\geq (1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \|\vec{a}\|_{L^\infty}) \langle H\phi, \phi \rangle \\
&\geq 2\pi(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \|\vec{a}\|_{L^\infty}) \|\phi\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

On a donc bien la minoration voulue.

CQFD

Lemme 4.4.3 . Soit $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ une solution des équations de Ginzburg-Landau (3.3.21) pour λ, k donnés. Supposons que l'opérateur $[i\nabla + \vec{A}_0 + \vec{a}]^2$ ait un niveau fondamental supérieur à λ ; alors $(\phi, \vec{a}) = (0, 0)$.

Preuve. Appellons $\lambda_{\vec{a}}$ le niveau fondamental de $[i\nabla + \vec{A}_0 + \vec{a}]^2$. La première équation de Ginzburg-Landau nous donne

$$[i\nabla + \vec{A}_0 + \vec{a}]^2 \phi = \phi(\lambda - |\phi|^2). \tag{4.4.10}$$

En multipliant l'équation (4.4.10) par $\bar{\phi}$ et en intégrant, on obtient :

$$\lambda_{\vec{a}} \|\phi\|_{L^2}^2 \leq \langle [i\nabla + \vec{A}_0 + \vec{a}]^2 \phi, \phi \rangle = \int_{\Omega} \lambda |\phi|^2 - |\phi|^4. \tag{4.4.11}$$

Cette équation implique :

$$\int_{\Omega} |\phi|^2 (\lambda - \lambda_{\vec{a}} - |\phi|^2) \geq 0. \tag{4.4.12}$$

Cette inégalité n'est possible que si $\phi = 0$.

L'équation originale (3.3.21) implique alors $L\vec{a} = \operatorname{rot}^* \operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$. Or on sait que L est inversible (cf 3.1.8) ; donc $\vec{a} = 0$.

CQFD

Lemme 4.4.4 . Soit $D > 0$; l'équation

$$2\pi(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} D \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{k^2}) = \lambda \tag{4.4.13}$$

possède une unique solution $\lambda(k, D) \in]0, 2\pi[$.

De plus la fonction $k \mapsto \lambda(k, D)$ vérifie les estimations

$$\begin{aligned}
\lambda(k, D) &> 2\pi(1 - \frac{2D\pi}{k^2}), \\
\lambda(k, D) &= 2\pi + O(\frac{1}{k^2}), \text{ si } k \rightarrow \infty \\
\lambda(k, D) &\simeq (\frac{\sqrt{2\pi}}{D})^{\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}} \text{ si } k \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

Preuve. La fonction $f_k(\lambda) = \lambda + \sqrt{2\pi} \frac{D\lambda^{\frac{3}{2}}}{k^2}$ est strictement croissante sur $[0, 2\pi]$ et vérifie $f_k(0) = 0$ ainsi que $f_k(2\pi) > 2\pi$. Par conséquent, l'équation

$$f_k(\lambda) = 2\pi \quad (4.4.15)$$

possède une unique solution $\lambda(k, D)$ dans $]0, 2\pi[$.
L'inégalité $0 < \lambda(k, D) < 2\pi$ implique

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{D\lambda(k, D)^{\frac{3}{2}}}{2k^2} < \frac{2D\pi}{k^2}. \quad (4.4.16)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \lambda(k, D) &= 2\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{D\lambda(k, D)^{\frac{3}{2}}}{2k^2}\right) \\ &> 2\pi \left(1 - \frac{2D\pi}{k^2}\right). \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

On a l'inégalité :

$$\begin{aligned} 2\pi &= \lambda(k, D) + \sqrt{2\pi} \frac{D\lambda(k, D)^{\frac{3}{2}}}{k^2} \\ &< \lambda(k, D) + 2\pi \frac{D\lambda(k, D)}{k^2} \\ &< \lambda(k, D) \left(1 + 2\pi \frac{D}{k^2}\right). \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

Ceci implique l'inégalité :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda(k, D)}} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{1 + 2\pi \frac{D}{k^2}}. \quad (4.4.19)$$

L'équation définissant $\lambda(k, D)$ nous donne :

$$2\pi = \sqrt{2\pi} \frac{D\lambda(k, D)^{\frac{3}{2}}}{k^2} \left(1 + \frac{k^2}{\sqrt{2\pi} D \sqrt{\lambda(k, D)}}\right). \quad (4.4.20)$$

L'inégalité (4.4.19) implique

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^2}{\sqrt{\lambda(k, D)}} = 0 \quad (4.4.21)$$

ce qui nous donne $2\pi \simeq \sqrt{2\pi} \frac{D\lambda(k,D)^{\frac{3}{2}}}{k^2}$. En inversant cet équivalent on obtient,

$$\lambda(k, D) \simeq \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{D}\right)^{\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}} \text{ si } k \rightarrow 0, \quad (4.4.22)$$

par un calcul simple.

CQFD

Théorème 4.4.5 . *Il existe une constante $D > 0$ tel que $\forall \vec{a} \in \mathcal{A}$,*

$$\|\vec{a}\|_{L^\infty} \leq D \|\Delta \vec{a}\|_{L^2}. \quad (4.4.23)$$

Pour cette constante D , pour $\lambda < \lambda(k, D)$ et si $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ est solution des équations de Ginzburg-Landau (3.3.21) alors $(\phi, \vec{a}) = (0, 0)$.

Preuve.

1^{ère} étape :

Il existe une constante C tel qu'on obtienne la majoration :

$$\forall \vec{a} \in H_0^2, \|\vec{a}\|_{H^2}^2 \leq C \int_{\Omega} \|\Delta \vec{a}\|^2. \quad (4.4.24)$$

L'espace H^2 se plonge continument dans L^∞ , il existe donc $D > 0$ ne dépendant que du réseau m tel que

$$\|\vec{a}\|_{L^\infty} \leq D \sqrt{\int_{\Omega} \|\Delta \vec{a}\|^2}. \quad (4.4.25)$$

2^{ème} étape :

Si $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ est solution de Ginzburg-Landau pour λ, k , le lemme 4.4.1 implique l'inégalité

$$\|\vec{a}\|_{L^\infty} \leq \frac{D\lambda^{\frac{3}{2}}}{2k^2}. \quad (4.4.26)$$

Le lemme 4.4.2 implique que le niveau fondamental de l'opérateur $[i\vec{\nabla} + (\vec{A}_0 + \vec{a})]^2$ est minoré par

$$2\pi - 2\sqrt{2\pi} \left(\frac{D\lambda^{\frac{3}{2}}}{2k^2}\right) = 2\pi - \sqrt{2\pi} \left(\frac{D\lambda^{\frac{3}{2}}}{k^2}\right). \quad (4.4.27)$$

La condition $\lambda_{\vec{a}} > \lambda$ du lemme 4.4.3 est donc vérifiée si

$$\lambda > 2\pi - \sqrt{2\pi} \frac{D\lambda^{\frac{3}{2}}}{k^2}. \quad (4.4.28)$$

Cela équivaut à $\lambda < \lambda(k, D)$ par le lemme 4.4.4.

Les hypothèses du lemme 4.4.3 étant vérifiées, on a $(\phi, \vec{a}) = (0, 0)$. **CQFD**

Théorème 4.4.6 . *Il existe $k_0 > 0$ et $h > 0$ tel que, si $k > k_0$ et $\lambda \in [0, 2\pi + h]$, alors les seules solutions de l'équation de Ginzburg-Landau sont la solution triviale et celles construites au théorème 4.1.3.*

Preuve.

1^{ère} étape :

Le théorème 4.1.3 montre qu'il existe un voisinage de $\epsilon = 0$ de la forme $]-\eta, \eta[$ et un voisinage de la solution triviale $(0, 0)$ de la forme $\|\phi\|_{H^1} + \|\vec{a}\|_{H^1} < \eta$ sur lequel on peut calculer les solutions des équations de Ginzburg-Landau par perturbation. Ce voisinage ne dépend que de k_0 .

Par le lemme 4.4.1, il existe $k'_0 > 0$ tel que, si $k \geq k'_0$, alors les solutions (ϕ, \vec{a}) des équations de Ginzburg-Landau vérifient $\|\vec{a}\|_{H^1} < \frac{\eta}{2}$.

2^{ème} étape :

Montrons qu'il suffit d'obtenir une estimée L^2 sur ϕ , l'estimée H^1 en découlant pour obtenir $\|\phi\|_{H^1} < \frac{\eta}{2}$.

Pour cela on utilise l'ellipticité du système d'équations de Ginzburg-Landau. Les calculs suivants sont possibles puisque l'on sait que (ϕ, \vec{a}) est C^∞ . L'équation de Ginzburg-Landau pour ϕ s'écrit

$$[i\vec{\nabla} + \vec{A}_0]^2\phi = \phi(\lambda - |\phi|^2) - 2\vec{a} \cdot (i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi - \vec{a}^2\phi. \quad (4.4.29)$$

On multiplie cette formule par $\bar{\phi}$, on intègre sur Ω et on utilise la majoration sur ϕ du théorème 3.4.2.

$$\|(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi\|_{L^2}^2 \leq \lambda\|\phi\|_{L^2}^2 + 2\|\vec{a}\phi\|_{L^2}\|(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi\|_{L^2} + \|\vec{a}\phi\|_{L^2}^2. \quad (4.4.30)$$

L'inéquation (4.4.30) implique

$$\begin{aligned} \|(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi\|_{L^2} &\leq \|\vec{a}\phi\|_{L^2} + \sqrt{2\|\vec{a}\phi\|_{L^2}^2 + \lambda\|\phi\|_{L^2}^2} \\ &\leq \|\vec{a}\|_{L^4}\|\phi\|_{L^4} + \sqrt{2\|\vec{a}\|_{L^4}^2\|\phi\|_{L^4}^2 + \lambda\|\phi\|_{L^2}^2}. \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

La norme L^4 de \vec{a} tend vers 0 quand k tend vers ∞ ; donc le contrôle en norme L^2 de ϕ se transforme trivialement en un contrôle en norme H^1 de ϕ par l'inégalité (4.4.31) et l'ellipticité de l'opérateur $i\vec{\nabla} + \vec{A}_0$.

Il existe donc $\eta_2 > 0$ tel que pour k assez grand $\|\phi\|_{L^2} < \eta_2$ implique $\|\phi\|_{H^1} < \frac{\eta}{2}$. Montrons maintenant l'estimée L^2 .

3^{ème} étape :

L'équation de Ginzburg-Landau donne la relation

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\phi|^2(\lambda - |\phi|^2) &= \langle \phi, \phi(\lambda - |\phi|^2) \rangle \\ &= \langle \phi, [i\vec{\nabla} + (\vec{A}_0 + \vec{a})]^2\phi \rangle \\ &\geq (2\pi - w(k)) \int_{\Omega} |\phi|^2. \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

Dans les équations (4.4.32) et (4.4.33), $2\pi - w(k)$ correspond à la valeur du niveau fondamental de l'opérateur $[i\vec{\nabla} + (\vec{A}_0 + \vec{a})]^2$. Le lemme 4.4.4 affirme que $w(k)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini. L'inégalité (4.4.32) s'écrit alors

$$\int_{\Omega} |\phi|^2 (\epsilon + w(k) - |\phi|^2) \geq 0. \quad (4.4.33)$$

On pose $r = \epsilon + w(k)$. L'inégalité (4.4.33) implique

$$(\int_{\Omega} |\phi|^2)^2 \leq \int_{\Omega} |\phi|^4 \leq r \int_{\Omega} |\phi|^2. \quad (4.4.34)$$

Cette équation implique que $\int_{\Omega} |\phi|^2 \leq |r|$.

On choisit $\epsilon \in]-\eta_2/2, \eta_2/2[$ et k assez grand pour que $\|\phi\|_{L^2}$ soit inférieur à η_2 .

Pour $\lambda \in [0, 2\pi - \eta_2/2[$ le théorème 4.4.5 et le lemme 4.4.4 nous donnent le résultat. **CQFD**

On a donc entièrement résolu notre problème initial dans le cas où k est grand. On peut préciser un peu le théorème 4.3.1.

Proposition 4.4.7 . *Il existe $k_0 > 0$ et $h > 0$ tel que si $k > k_0$ et $\lambda \in [2\pi, 2\pi + h[$ alors la courbe de solutions bifurquées définie au théorème 4.1.3 est le minimum de la fonctionnelle.*

Preuve. Si le couple (ϕ, \vec{a}) est un couple qui minimise la fonctionnelle de Ginzburg-Landau, alors il est solution des équations de Ginzburg-Landau donc il est égal soit à la solution nulle soit au couple bifurqué.

Le théorème 4.2.1 indique que l'énergie du couple bifurqué est plus basse que celle du couple $(0, 0)$. Le couple (ϕ, \vec{a}) est donc égal au couple bifurqué. **CQFD**

Chapitre 5

Analyse du minimum $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V$

Dans ce chapitre, on décrit la structure du diagramme de phase (cf 2.4.17). On utilise pour cela la fonctionnelle $E_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi, \vec{a})$ (cf (2.4.27)). On utilise aussi la distinction entre les différents états possibles effectués dans la définition 2.4.17.

On montre d'abord des théorèmes de monotonie sur l'état du supraconducteur puis on revient sur le cas $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Les troisième et quatrième parties sont consacrées à l'état normal et à l'état pur défini en 2.4.17.

On rappelle que l'énergie de l'état normal est $\frac{1}{4}$ et que l'énergie pour $H_{int} = 0$ est $\frac{H_{ext}^2}{2}$ qui est l'énergie de l'état pur.

5.1 Théorèmes de monotonie

On utilise ici la fonctionnelle $E_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi, \vec{a})$ définie à l'équation (2.4.27).

Théorème 5.1.1 . *Soit (k, H_{ext}) un point du diagramme des phases du supraconducteur où $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V = \frac{H_{ext}^2}{2}$. Alors, pour tout $k' \leq k$, tout $H'_{ext} \leq H_{ext}$, on a : $\mathcal{E}_{k',H'_{ext}}^V = \frac{H_{ext}'^2}{2}$.*

Remarque 5.1.2 . *En utilisant le langage des physiciens, on dira que, si (k, H_{ext}) est un point du diagramme des phases où le supraconducteur est pur et si $k' \leq k$ et $H'_{ext} \leq H_{ext}$, alors le supraconducteur est aussi pur en ce point.*

Preuve. Soit donc (k, H_{ext}) un point du diagramme des phases sur lequel $\mathcal{E}_{k, H_{ext}}^V = \frac{H_{ext}^2}{2}$. Cela signifie que l'énergie minimale est $\frac{H_{ext}^2}{2}$. En ce point l'énergie minimale de la fonctionnelle est atteinte par l'état $(0, \sqrt{\lambda}, 0)$ qui est un état de quantification 0. Par définition cela équivaut à

$$\forall H_{int} > 0, \forall (\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}, D_{\lambda, k}(\phi, \vec{a}) + \frac{1}{2}(H_{int} - H_{ext})^2 \geq \frac{H_{ext}^2}{2}. \quad (5.1.1)$$

L'inégalité (5.1.1) est équivalente à

$$\begin{aligned} & \forall H_{int} > 0, \forall (\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}, \\ & \left\{ \int_{\Omega} \frac{H_{int}}{4\pi k} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \frac{1}{4}(1 - |\phi|^2)^2 \right. \\ & \left. + \frac{H_{int}^2}{2(2\pi)^2} |\text{rot } \vec{a}|^2 \right\} + \frac{H_{int}^2 - 2H_{int}H_{ext}}{2} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Si k décroît alors $\frac{1}{k}$ croît ; les intégrales étant positives, le membre de gauche de (5.1.2) croît. Si H_{ext} décroît, alors la quantité $-2H_{int}H_{ext}$ croît et donc le membre de gauche croît. Par conséquent, si $k' \leq k$ et si $H'_{ext} \leq H_{ext}$, l'état qui minimise la fonctionnelle vérifie donc $\mathcal{E}_{k', H'_{ext}}^V \geq \frac{H_{ext}^2}{2}$ et il y a égalité par le lemme 3.4.1. **CQFD**

Théorème 5.1.3 . *Soit (k, H_{ext}) un point du diagramme des phases du supraconducteur où le minimum de la fonctionnelle est atteint par l'état normal. Alors, pour tout $k' \geq k$, le minimum de la fonctionnelle au point $(k', \frac{k'}{k}H_{ext})$ est atteint par l'état normal.*

Preuve. L'énergie de l'état normal est égale à $\frac{1}{4}$. On pose $H'_{ext} = \frac{k'}{k}H_{ext}$. On a donc, puisque l'état normal est un minimum :

$$\begin{aligned} & \forall H_{int} > 0, \forall (\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}, \\ & \frac{H_{int}^2}{(2\pi k)^2} \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi k}{H_{int}} - |\phi|^2 \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{k^2}{2} |\text{rot } \vec{a}|^2 \right\} + \frac{1}{2}(H_{int} - H_{ext})^2 \geq \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

L'inégalité à démontrer est :

$$\begin{aligned} & \forall H'_{int} > 0, \forall (\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}, \\ & \frac{H'_{int}{}^2}{(2\pi k')^2} \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi k'}{H'_{int}} - |\phi|^2 \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{k'^2}{2} |\text{rot } \vec{a}|^2 \right\} + \frac{1}{2}(H'_{int} - H'_{ext})^2 \geq \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

On écrit $H'_{int} = \frac{k'}{k} H_{int}$ et on obtient

$$\frac{k}{H_{int}} = \frac{k'}{H'_{int}}. \quad (5.1.5)$$

L'inégalité à démontrer est alors équivalente à

$$\begin{aligned} & \forall H_{int} > 0, \forall (\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}, \\ & \frac{H_{int}^2}{(2\pi k)^2} \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|i \vec{\nabla} \phi + (\vec{A}_0 + \vec{a}) \phi\|^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi k}{H_{int}} - |\phi|^2 \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{k'^2}{2} |\text{rot } \vec{a}|^2 \right\} + \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \frac{1}{2} (H_{int} - H_{ext})^2 \geq \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Cette inégalité est impliquée par l'inégalité (5.1.3) car $k' \geq k$. **CQFD**

Théorème 5.1.4 . Soit (k, H_{ext}) un point du diagramme des phases du supraconducteur où le minimum de la fonctionnelle est atteint par l'état normal. Alors $\forall H'_{ext} \geq H_{ext}$ le minimum de la fonctionnelle est atteint par l'état normal.

Preuve. L'énergie de l'état normal est égale à $\frac{1}{4}$.

On a donc, puisque l'état normal est un minimum :

$$\forall H_{int} > 0, \frac{1}{\lambda^2} m_F(\lambda, k) + \frac{1}{2} (H_{int} - H_{ext})^2 \geq \frac{1}{4}. \quad (5.1.7)$$

Rappelons que $m_F(\lambda, k)$ a été introduit en (2.4.18).

En particulier si $H_{int} = H_{ext}$, cette inégalité implique

$$\left(\frac{H_{ext}}{2\pi k} \right)^2 m_F\left(\frac{2\pi k}{H_{ext}}, k \right) \geq \frac{1}{4}. \quad (5.1.8)$$

C'est l'inégalité (5.1.7) qu'il faut démontrer avec H_{ext} remplacé par H'_{ext} . Si $H_{int} \leq H_{ext}$, alors on a trivialement

$$(H_{int} - H_{ext})^2 \leq (H_{int} - H'_{ext})^2. \quad (5.1.9)$$

Par conséquent, l'inégalité (5.1.7) est démontrée pour $H_{int} \leq H_{ext}$ avec H_{ext} remplacé par H'_{ext} .

Si $H_{int} > H_{ext}$ alors le théorème (3.4.12) combinée à l'inégalité (5.1.8) nous donne

$$\left(\frac{H_{int}}{2\pi k} \right)^2 m_F\left(\frac{2\pi k}{H_{int}}, k \right) \geq \left(\frac{H_{ext}}{2\pi k} \right)^2 m_F\left(\frac{2\pi k}{H_{ext}}, k \right) \geq \frac{1}{4}. \quad (5.1.10)$$

Par conséquent l'inégalité (5.1.7) est démontrée si $H_{int} > H_{ext}$ par conséquent l'inégalité (5.1.7) est donc démontré avec H_{ext} remplacé par H'_{ext} . **CQFD**

Remarque 5.1.5 . Même si la démonstration utilise la modélisation de l'état de quantification 1 (voir l'hypothèse 2.4.1), la démonstration des théorèmes de monotonies n'utilise pas cette hypothèse. Ces théorèmes doivent donc être vrai dans un cadre plus général.

Le théorème 3.5.1 nous permet de trouver le minimum $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V$ dans certains cas.

Lemme 5.1.6 . Si $H_{ext} = k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors le minimum $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V$ est égal à $\frac{1}{4}$. De plus, il est atteint par l'état normal et par l'état pur.

Preuve. En vertu du théorème (3.4.13), il faut démontrer l'inégalité :

$$\forall H_{int} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \left(\frac{H_{int}}{2\pi k}\right)^2 m_F\left(\frac{2\pi k}{H_{int}}, k\right) + \frac{1}{2}\left(H_{int} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq \frac{1}{4}. \quad (5.1.11)$$

Mais le théorème 3.5.1 nous donne l'inégalité :

$$m_F(\lambda, k) \geq \lambda\pi - \pi^2. \quad (5.1.12)$$

Par conséquent, l'inégalité (5.1.11) est impliquée par l'inégalité (on utilise $\lambda = \frac{2\pi k}{H_{int}}$)

$$\forall H_{int} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \left[\frac{H_{int}}{2k} - \left(\frac{H_{int}}{2k}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left(H_{int} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq \frac{1}{4}. \quad (5.1.13)$$

Or cette dernière inégalité est en fait une égalité ; donc on a démontré ce que l'on voulait.

L'énergie de l'état normal est $\frac{1}{4}$. L'énergie de l'état pur est égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

CQFD

Théorème 5.1.7 . Si $k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors

$$\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V = \begin{cases} \frac{H_{ext}^2}{2} & \text{si } H_{ext} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \text{si } H_{ext} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}. \quad (5.1.14)$$

Remarque 5.1.8 . En terme physique cela se dit : Si $k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors le minimum $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V$ est atteint par l'état supraconducteur pur si $H_{ext} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et par l'état normal si $H_{ext} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et par ces deux états si $H_{ext} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Preuve. Le lemme 5.1.6 combiné au théorème 5.1.1 donne le résultat dans le cas $H_{ext} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Par conséquent, le minimum de la fonctionnelle est égal à $\frac{1}{4}$ si $k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $H_{ext} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Il se trouve que $\frac{1}{4}$ est égal à l'énergie de l'état normal.

Donc le théorème 5.1.4 nous donne la conclusion si $H_{ext} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. **CQFD**

Théorème 5.1.9 . Si $H_{ext} \geq k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors :

$$\mathcal{E}_{k, H_{ext}}^V = \frac{1}{4}. \quad (5.1.15)$$

Autrement dit le théorème nous dit que le minimum de la fonctionnelle est atteint par l'état normal.

Preuve. Le lemme 5.1.6, le théorème 5.1.3 et le théorème 5.1.4 nous donnent le résultat. **CQFD**

5.2 Analyse du cas $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (d'après [Sa])

Dans cette section, on souhaite étudier en profondeur la fonctionnelle $F_{\lambda, k}$ dans le cas $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce but, on montre que l'équation $A_+(\phi, \vec{a}) = 0$ possède une solution pour tout $\lambda > 2\pi$.

On a besoin d'un résultat d'analyse sur les variétés dans cette partie; on reprend ici l'appendice 4 du preview [Sa] qui n'est semble t'il pas publié. Ce résultat occupe la première sous section qui est reprise de [Sa].

On peut alors résoudre l'équation $A_+ = 0$ et trouver ainsi les couples minimisants la fonctionnelle $F_{\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}}}$. On déduit de ce résultat une égalité remarquable sur les constantes I et K définies aux équations (4.1.49) et (4.1.50). Cette partie n'est pas complètement originale, il y a des travaux similaires dans [CY], [Ga], [Tau].

5.2.1 L'équation de Kazdan-Warner (d'après [Sa])

Rappelons que \mathcal{L} est un réseau de \mathbb{R}^2 et Ω un domaine fondamental pour ce réseau. Les fonctions \mathcal{L} -périodiques s'identifient aux fonctions sur \mathbb{R}^2/\mathcal{L} .

Théorème 5.2.1 . Soit h une fonction positive non nulle appartenant à $H^n(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ avec $n \geq 2$. Si A est un réel strictement positif, alors l'équation

$$-\Delta u + e^u h = A \quad (5.2.1)$$

possède une unique solution u dans $H^{n+2}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$

Preuve. On utilise l'ensemble ouvert

$$\mathcal{H} = \{h \in H^n(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}) \text{ avec } h \geq 0 \text{ et } \int_{\Omega} h > 0\}. \quad (5.2.2)$$

On note :

$$\mathcal{U} = \{(h, u) \in \mathcal{H} \times H^{n+2}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}) \mid -\Delta u + e^u h = A\}, \quad (5.2.3)$$

l'espace des solutions de l'équation (5.2.1). Le lemme suivant donne ses propriétés.

Lemme 5.2.2 . *L'espace $\mathcal{U} \subset H^n(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}) \times H^{n+2}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ est une variété C^∞ de Banach et la projection*

$$\pi : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{H} \quad (5.2.4)$$

définie par $\pi(h, u) = h$ est un difféomorphisme local au voisinage de tous les points de \mathcal{U} .

Preuve. Considérons l'application $P : H^n(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}) \times H^{n+2}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}) \mapsto H^n(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ définie par

$$P(h, u) = -\Delta u + e^u h - A. \quad (5.2.5)$$

Sa différentielle au point (h, u) est :

$$dP_{(h,u)}(\hat{h}, \hat{u}) = -\Delta \hat{u} + e^u h \hat{u} + e^u \hat{h}. \quad (5.2.6)$$

Étudions l'opérateur

$$\begin{aligned} R : C^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}) &\mapsto C^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto Rf = -\Delta f + e^u h f. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Cet opérateur est symétrique sur l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R})$. C'est un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2 sur le tore \mathbb{R}^2/\mathcal{L} qui est une variété compacte. Donc l'opérateur R possède une extension autoadjointe de domaine $\mathcal{D}(R) = H^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R})$ que l'on continue à appeler R (voir par exemple [LM], théorème III.5.8). De plus, l'injection de $H^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ dans $L^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ étant compacte, son spectre est discret.

Si $(h, u) \in H^{n+2}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R})$ alors l'opérateur R restreint à $H^n(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R})$ a pour image $H^{n+2}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R})$.

Il suffit pour montrer que R est inversible de montrer que R est injectif car

R possède un spectre discret.
Soit donc $\hat{u} \in H^2(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ tel que

$$-\Delta \hat{u} + e^u h \hat{u} = 0. \quad (5.2.8)$$

En faisant le produit scalaire de l'équation (5.2.8) par \hat{u} on obtient l'équation

$$\int_{\Omega} (\|\vec{\nabla} \hat{u}\|^2 + e^u h |\hat{u}|^2) = 0 \quad (5.2.9)$$

qui implique que la fonction \hat{u} s'annule sur un ensemble de mesure positive (là où la fonction h est différente de 0). De plus $\vec{\nabla} \hat{u} = 0$ donc la fonction \hat{u} est constante. Elle est donc nulle. Par conséquent, l'opérateur R est injectif donc surjectif et il est inversible pour toute paire $(h, u) \in \mathcal{H} \times H^{n+2}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$. Cela montre que 0 est une valeur régulière de la fonction P ; donc $P^{-1}(0)$ est une variété de Banach par le théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach. Or $\mathcal{U} = P^{-1}(0)$; donc \mathcal{U} est une variété de Banach. L'espace tangent à \mathcal{U} en (h, u) est le noyau de $dP(h, u)$:

$$T_{(h,u)}\mathcal{U} = \{(\hat{h}, \hat{u}) | (-\Delta + e^u h)\hat{u} + e^u \hat{h} = 0\}. \quad (5.2.10)$$

Maintenant le linéarisé de l'opérateur de projection :

$$d\pi(h, u) : T_{(h,u)}\mathcal{U} \mapsto H^n(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}), \quad (5.2.11)$$

est donnée par $(\hat{h}, \hat{u}) \mapsto \hat{h}$. Cet opérateur est bijectif si et seulement si, pour tout $\hat{h} \in H^n(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$, il existe un unique $\hat{u} \in H^{n+2}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ tel que $(\hat{h}, \hat{u}) \in T_{(h,u)}\mathcal{U}$. Cela provient de la bijectivité de l'opérateur $-\Delta + e^u h$. Maintenant le théorème d'inversion locale montre que chaque paire $(h, u) \in \mathcal{U}$ possède un voisinage \mathcal{V} tel que la restriction de π à \mathcal{V} est un difféomorphisme de \mathcal{V} sur $\pi(\mathcal{V})$. **CQFD**

La proposition suivante est la clé du théorème, il donne des estimées à priori sur les solutions de l'équation (5.2.1).

Proposition 5.2.3 . *Il existe une fonction continue $\phi_A :]0, \infty[^2 \rightarrow]0, \infty[$ telle que*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \phi_A(\|h\|_{L^2}, \int_{\Omega} h) \quad (5.2.12)$$

pour toute solution (h, u) de l'équation (5.2.1).

Remarque 5.2.4 . La preuve de la proposition montrera que l'on peut prendre pour ϕ_A la fonction

$$\phi_A(t, B) = |\log(\frac{A}{B})| + 2c_0A + 2\frac{c_0At}{B} \exp(4\frac{c_0At}{B}) \quad (5.2.13)$$

où c_0 est la constante introduite au lemme 3.1.9.

Preuve.

1^{ère} étape : Si $(h, u) \in C^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})^2$ et sont solution de l'équation (5.2.1), alors :

$$u(x) \leq 4\frac{c_0At}{B} + \log(\frac{A}{B}) \quad (5.2.14)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, avec $t = \|h\|_{L^2}$, $B = \int_{\Omega} h$.

La fonction $h_0 = h - B$ a une moyenne nulle ; par conséquent, d'après le lemme 3.1.9, il existe une unique fonction $v_0 \in C^\infty(\Omega)$ telle que :

$$-\Delta v_0 = -h_0 = B - h \text{ et } \int_{\Omega} v_0 = 0. \quad (5.2.15)$$

Le lemme 3.1.9 donne la majoration :

$$\|v_0\|_{L^\infty} \leq c_0\|h_0\|_{L^2} \leq c_0(\|h\|_{L^2} + B) \leq 2c_0t. \quad (5.2.16)$$

Considérons maintenant la fonction w \mathcal{L} -périodique sur \mathbb{R}^2 , définie par :

$$w_\epsilon(x) = \log(\frac{A+\epsilon}{B}) + \frac{A+\epsilon}{B}(v_0(x) + 2c_0t) - u(x) \text{ avec } \epsilon > 0. \quad (5.2.17)$$

Si x_ϵ est un point de \mathbb{R}^2 où elle atteint son minimum, alors :

$$w_\epsilon(x_\epsilon) = \inf_{\Omega} w_\epsilon \text{ et } (-\Delta w_\epsilon)(x_\epsilon) \leq 0. \quad (5.2.18)$$

Cette inégalité nous donne :

$$\begin{aligned} 0 &\geq (-\Delta w_\epsilon)(x_\epsilon) \\ &= \frac{A+\epsilon}{B}(-\Delta v_0(x_\epsilon)) + \Delta u(x_\epsilon) \\ &= \frac{A+\epsilon}{B}(B - h(x_\epsilon)) + e^{u(x_\epsilon)}h(x_\epsilon) - A \\ &= \epsilon + h(x_\epsilon)(e^{u(x_\epsilon)} - \frac{A+\epsilon}{B}). \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Cela implique :

$$h(x_\epsilon) \neq 0 \text{ et } u(x_\epsilon) < \log(\frac{A+\epsilon}{B}). \quad (5.2.20)$$

Par conséquent, on a $w_\epsilon(x_\epsilon) \geq 0$ et donc $w_\epsilon(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. La limite $\epsilon \rightarrow 0$ donne l'inégalité

$$u(x) \leq \log\left(\frac{A}{B}\right) + \frac{A}{B}(v_0(x) + 2c_0t). \quad (5.2.21)$$

Cette inégalité, combinée à l'inégalité (5.2.16), donne l'inégalité (5.2.14).
2^{ème} étape : Si $(h, u) \in C^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})^2$ et sont solution de l'équation (5.2.1), alors la fonction $A - e^u h$ a une moyenne nulle. L'unique solution $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ de

$$-\Delta u_0 = A - e^u h \text{ et } \int_{\Omega} u_0 = 0 \quad (5.2.22)$$

vérifie

$$\|u_0\|_{L^\infty} \leq c_0 A + \frac{c_0 A t}{B} \exp\left(4 \frac{c_0 A t}{B}\right). \quad (5.2.23)$$

La fonction u vérifie $-\Delta u = A - e^u h$, elle est donc de moyenne nulle.

Par le lemme 3.1.9, on a l'inégalité :

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{L^\infty} &\leq c_0 \|A - e^u h\|_{L^2} \\ &\leq c_0 (\|A\|_{L^2} + \|e^u h\|_{L^2}) \\ &\leq c_0 (A + t e^{\sup u}). \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

La conclusion provient alors de la première étape.

3^{ème} étape : Si (h, u, u_0) sont comme dans l'étape 2, alors

$$u = u_0 - \log\left(\frac{1}{A} \int_{\Omega} e^{u_0} h\right) \quad (5.2.25)$$

et

$$\|u\|_{L^\infty} \leq 2\|u_0\|_{L^\infty} + |\log(\frac{A}{B})|. \quad (5.2.26)$$

Puisque $\Delta(u - u_0) = 0$, il s'ensuit que : $u = u_0 + c$, où c est une constante. La valeur de c est déterminée par le fait que la fonction $A - e^{u_0+c} h$ a une moyenne nulle. Par conséquent, on a :

$$c = -\log\left(\frac{1}{A} \int_{\Omega} e^{u_0} h\right), \quad (5.2.27)$$

ce qui prouve la relation (5.2.25). Maintenant, on remarque que :

$$\exp(-\|u_0\|_{L^\infty}) h \leq e^{u_0} h \leq \exp(\|u_0\|_{L^\infty}) h. \quad (5.2.28)$$

En intégrant sur Ω , on obtient :

$$\exp(-\|u_0\|_{L^\infty}) \frac{B}{A} \leq \frac{1}{A} \int_{\Omega} e^{u_0} h \leq \exp(\|u_0\|_{L^\infty}) \frac{B}{A}. \quad (5.2.29)$$

En prenant les logarithmes, on obtient

$$|c| \leq \|u_0\|_{L^\infty} + \left| \log\left(\frac{A}{B}\right) \right|. \quad (5.2.30)$$

Puisque $u = u_0 + c$, cela prouve la relation (5.2.26).

4^{ème} étape : Preuve de la proposition .

On déduit des étapes 2 et 3 que toute solution (h, u) de (5.2.1), avec $h \neq 0$, vérifie :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty} &\leq \left| \log\left(\frac{A}{B}\right) \right| + 2\|u_0\|_{L^\infty} \\ &\leq \left| \log\left(\frac{A}{B}\right) \right| + 2\left[c_0 A + \frac{c_0 A t}{B} \exp\left(4 \frac{c_0 A t}{B}\right)\right] \\ &\leq \phi_A(t, B). \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

On a utilisé l'inégalité (5.2.23). Cela prouve le lemme pour les solutions C^∞ . Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe un couple $(h_0, u_0) \in \mathcal{U}$ tel que :

$$\|u_0\|_{L^\infty} > \phi_A(\|h_0\|_{L^2}, \int_{\Omega} h_0). \quad (5.2.32)$$

Considérons la projection $\pi : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{H}$ et l'inverse local

$$\begin{cases} \mathcal{H} &\mapsto H^{n+2}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}) \\ h &\mapsto u_h \end{cases} \quad (5.2.33)$$

qui fait correspondre à tout élément h suffisamment proche de h_0 l'unique solution $u = u_h$ de l'équation (5.2.1) proche de u_0 . Cette application est continue et donc

$$\|u_h\|_{L^\infty} > \phi_A(\|h\|_{L^2}, \int_{\Omega} h) \quad (5.2.34)$$

pour h suffisamment proche de h_0 . Prenons une fonction h proche de h_0 . Alors, par la régularité elliptique, la fonction u est aussi C^∞ donc l'inégalité (5.2.34) contredit l'inégalité (5.2.31). **CQFD**

Preuve du théorème. Considérons la projection

$$\pi : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{H} \quad (5.2.35)$$

du lemme 5.2.2. Le lemme 5.2.3 montre que l'ensemble $\pi^{-1}(h)$ des solutions $u \in H^{n+2}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ de l'équation (5.2.1) est compact. En effet si $u_\nu \in \pi^{-1}(h)$ est une suite, elle vérifie une estimée uniforme

$$\sup_{\nu} \|u_\nu\|_{L^\infty} \leq c_1. \quad (5.2.36)$$

Puisque $-\Delta u_\nu = A - e^{u_\nu} h$ les estimées elliptiques dans les espaces L^2 (cf (3.3.1)) donnent

$$\sup_{\nu} \|u_\nu\|_{H^{n+2}} \leq c_2. \quad (5.2.37)$$

Le théorème 2.2.3 nous dit que l'injection de Sobolev $H^{n+2}(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}^2/\mathcal{L})$ est compacte. Par conséquent il existe une sous suite $u_{\psi(\nu)}$ qui converge en norme L^∞ . Puisque $u_{\psi(\nu)}$ est solution de l'équation (5.2.1), on obtient par le théorème 3.3.1 la convergence $u_{\psi(\nu)}$ en norme H^{n+2} . Cela prouve la compacité.

Le lemme 5.2.2 nous indique que les points de $\pi^{-1}(h)$ sont isolés pour la norme H^{n+2} ; cela montre que $\pi^{-1}(h)$ est un ensemble fini, pour tout $h \in \mathcal{H}$. Cela implique que la projection π est un revêtement d'espace topologique (voir par exemple [Do], p. 102). On a donc la relation

$$\text{card } \pi^{-1}(h_0) = \text{card } \pi^{-1}(h_1) \quad (5.2.38)$$

pour tout $h_0, h_1 \in \mathcal{H}$. Cela montre que le nombre de points dans $\pi^{-1}(h)$ est indépendant de $h \in \mathcal{H}$. Montrons que ce nombre est égal à 1, en utilisant la fonction $h(x) = 1$. L'équation

$$-\Delta u + e^u = A \quad (5.2.39)$$

possède la solution évidente $u(x) = \log A$. Montrons que c'est la seule solution.

Soit donc u une solution de l'équation (5.2.39) et soit x_0 un point où u atteint son maximum. En ce point, on a la relation :

$$0 \leq -\Delta u(x_0) = A - e^{u(x_0)}. \quad (5.2.40)$$

On a donc $e^{u(x_0)} \leq A$ et donc :

$$e^{u(x)} \leq A, \quad (5.2.41)$$

pour tout $x \in \Omega$. Par ailleurs l'équation (5.2.39) implique :

$$\int_{\Omega} (A - e^u) = 0 \quad (5.2.42)$$

et ceci n'est possible que si $e^{u(x)} = A$.

CQFD

Dans la section suivante on va ramener l'équation $A_+ = 0$ à l'équation de Kazdan-Warner.

5.2.2 Résolution de $A_+ = 0$ et conséquences

Dans cette section on trouve toutes les sections qui minimisent la fonctionnelle A_+ . Il existe une étude similaire dans [Al2] pour un problème rectangulaire.

Rappelons le théorème 3.5.1 : si $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ alors

$$F_{\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}}}(\phi, \vec{a}) = \lambda\pi - \pi^2 + A_+(\phi, \vec{a}). \quad (5.2.43)$$

L'expression de A_+ est

$$A_+(\phi, \vec{a}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |D_+\phi|^2 + \frac{1}{4} |2\pi + \text{rot } \vec{a} - (\lambda - |\phi|^2)|^2, \quad (5.2.44)$$

où

$$D_+\phi = 2L_+\phi + (a_y - ia_x)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y} + A_y\phi - iA_x\phi. \quad (5.2.45)$$

Dans le théorème suivant, ϕ_0 est l'état fondamental de l'opérateur de Schrödinger magnétique H défini à la section 3.1. La fonction ϕ_0 appartient aussi au noyau de l'opérateur L_+ (cf le lemme 3.1.2). On note z_0 le zéro de ϕ_0 dans Ω qui est unique par la proposition 3.1.6.

Définition 5.2.5 . Si $h = h_x + ih_y \in \mathbb{C}$, on définit :

$$\phi_h(x, y) = e^{i\pi(h_y x - h_x y)} \phi_0(z - h). \quad (5.2.46)$$

Proposition 5.2.6 . On a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \phi_h \in C^\infty(E_1) \\ \phi_h(z_0 + h) = 0 \\ \phi_h^{-1}(\{0\}) = z_0 + h + \mathcal{L} \\ \phi_{h=0} = \phi_0 \\ L_+(\phi_h) = \pi h \phi_h \end{cases} \quad (5.2.47)$$

Par ailleurs si $v = n_1 r + n_2(w + iu) \in \mathcal{L}$ alors il existe un complexe D de module 1 tel que

$$\phi_{h+v}(z) = D e^{2i\pi([n_2 u]x - [n_1 r + n_2 w]y)} \phi_h(z), \quad (5.2.48)$$

la fonction $e^{2i\pi([n_2 u]x - [n_1 r + n_2 w]y)}$ étant \mathcal{L} -périodique.

Preuve. Montrons tout d'abord que ϕ_h est bien une section de E_1 ; on a :

$$\begin{aligned} \phi_h(z+r) &= e^{i\pi(h_y(x+r)-h_x y)} \phi_0(z+r-h) \\ &= e^{i\pi h_y r} e^{i\pi(h_y x - h_x y)} e^{i\pi r(y-h_y)} \phi_0(z-h) \\ &= e^{i\pi(h_y x - h_x y)} e^{i\pi r y} \phi_0(z-h) \\ &= e^{i\pi r y} \phi_h(z), \\ \phi_h(z+w+iu) &= e^{i\pi(h_y(x+w)-h_x(y+u))} \phi_0(z+w+iu-h) \\ &= e^{i\pi(h_y w - h_x u)} e^{i\pi(h_y x - h_x y)} e^{i\pi[w(y-h_y)-u(x-h_x)]} \phi_0(z-h) \\ &= e^{i\pi(h_y x - h_x y)} e^{i\pi[wy-ux]} \phi_0(z-h) \\ &= e^{i\pi[wy-ux]} \phi_h(z). \end{aligned} \quad (5.2.49)$$

L'ensemble des zéros de ϕ_0 est $z_0 + \mathcal{L}$ par la proposition 3.1.6. Puisque l'exponentielle ne s'annule pas, l'ensemble des zéros de ϕ_h est exactement $z_0 + h + \mathcal{L}$ (c'est pour cela que ϕ_h a été construit).

La section ϕ_0 vérifie l'équation

$$L_+(\phi_0)(z) = \frac{\partial \phi_0}{\partial \bar{z}}(z) + \frac{\pi}{2} z \phi_0(z) = 0. \quad (5.2.50)$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} L_+(\phi_h)(z) &= \frac{\partial e^{i\pi(h_y x - h_x y)} \phi_0(z-h)}{\partial \bar{z}} + \frac{\pi}{2} z e^{i\pi(h_y x - h_x y)} \phi_0(z-h) \\ &= \frac{\pi}{2} i h_y \phi_h + \frac{i\pi}{2} (-i h_x) \phi_h + e^{i\pi(h_y x - h_x y)} \frac{\partial \phi_0}{\partial \bar{z}}(z-h) + \frac{\pi}{2} z \phi_h \\ &= \frac{\pi}{2} h \phi_h + e^{i\pi(h_y x - h_x y)} \frac{-\pi}{2} (z-h) \phi_0(z-h) + \frac{\pi}{2} z \phi_h \\ &= \frac{\pi}{2} h \phi_h + \frac{-\pi}{2} (z-h) \phi_h + \frac{\pi}{2} z \phi_h \\ &= \frac{\pi}{2} h \phi_h + \frac{\pi}{2} h \phi_h \\ &= \pi h \phi_h. \end{aligned} \quad (5.2.51)$$

On calcule en utilisant les relations précédentes

$$\begin{aligned}
\phi_{h+v}(z) &= e^{i\pi([h_y+n_2u]x-[h_x+n_1r+n_2w]y)}\phi_0(z-h-v) \\
&= e^{i\pi(h_yx-yh_x)}e^{i\pi([n_2u]x-[n_1r+n_2w]y)}\phi_0(z-h-n_1r-n_2(w+iu)) \\
&= e^{i\pi(h_yx-yh_x)}e^{i\pi([n_2u]x-[n_1r+n_2w]y)} \\
&\quad e^{-i\pi n_1r(y-h_y)-i\pi n_2[w(x-h_x)-u(y-h_y)]}\phi_0(z-h) \\
&= e^{2i\pi([n_2u]x-[n_1r+n_2w]y)}e^{i\pi n_1rh_y-i\pi n_2[-wh_x+uh_y]}\phi_h(z) \\
&= De^{2i\pi([n_2u]x-[n_1r+n_2w]y)}\phi_h(z)
\end{aligned} \tag{5.2.52}$$

avec $D = e^{i\pi n_1rh_y-i\pi n_2[-wh_x+uh_y]}$.

CQFD

Théorème 5.2.7 . On suppose $\lambda > 2\pi$.

Les solutions dans \mathcal{A} de l'équation $A_+(\phi, \vec{a}) = 0$ sont de la forme

$$\begin{cases} \phi = \phi_0 e^{ic} e^f \\ \vec{a} = (\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}) \end{cases} \tag{5.2.53}$$

où f est la solution régulière de l'équation

$$0 = -\Delta f - (\lambda - 2\pi) + |\phi_0|^2 e^{2f} \tag{5.2.54}$$

et $c \in \mathbb{R}$.

Preuve.

1^{ère} étape : On spécifie ici les notations, les équations à résoudre et la régularité.

Soit (ϕ, \vec{a}) un couple vérifiant $A_+(\phi, \vec{a}) = 0$.

Résoudre l'équation $A_+ = 0$ équivaut compte tenu de (5.2.44) à résoudre le système d'équation

$$\begin{cases} D_+\phi = 0, \\ 2\pi + \text{rot } \vec{a} = \lambda - |\phi|^2. \end{cases} \tag{5.2.55}$$

Puisque $F_{\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}}}(\phi, \vec{a}) = \lambda\pi - \pi^2 + A_+(\phi, \vec{a})$, le couple (ϕ, \vec{a}) minimise la fonctionnelle $F_{\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}}}$. Par le théorème 3.3.10, le couple (ϕ, \vec{a}) est C^∞ .

Par le théorème 2.3.7, la section ϕ admet un zéro que l'on écrit sous la forme $z_h = h + z_0$.

La fonction ϕ définie sur \mathbb{C} s'annule donc au moins sur l'ensemble $z_h + \mathcal{L}$ tandis que la fonction ϕ_h s'annule exactement sur l'ensemble $z_h + \mathcal{L}$ (cf (5.2.47)).

2^{ème} étape : On réécrit les équations avec ϕ_h .

On pose

$$f = \frac{\phi}{\phi_h}. \tag{5.2.56}$$

La fonction f est défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_h + \mathcal{L}\}$. Puisque $\phi, \phi_h \in C^\infty(E_1)$, le quotient f est une fonction \mathcal{L} -périodique. L'équation $D_+(\phi) = 0$ se réécrit :

$$\begin{aligned} 0 &= 2L_+(f\phi_h) + (a_y - ia_x)f\phi_h \\ &= 2\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\phi_h + \pi h f\phi_h\right] + (a_y - ia_x)f\phi_h \\ &= [2\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \pi h f\right] + (a_y - ia_x)f]\phi_h, \end{aligned} \quad (5.2.57)$$

cette équation étant vérifiée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_h + \mathcal{L}\}$.

Puisque ϕ_h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_h + \mathcal{L}\}$ qui est l'ensemble de définition de f , on peut simplifier l'équation sur cet ensemble :

$$0 = 2\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \pi h f\right] + (a_y - ia_x)f. \quad (5.2.58)$$

On pose $w = \frac{(-a_y - 2\pi h_x) + i(a_x - 2\pi h_y)}{2}$; la fonction w est C^∞ , \mathcal{L} -périodique et est définie sur \mathbb{R}^2 .

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= -f\pi(h_x + ih_y) - \frac{(a_y - ia_x)}{2}f \\ &= f\left[\frac{(-a_y - 2\pi h_x) + i(a_x - 2\pi h_y)}{2}\right] \\ &= fw. \end{aligned} \quad (5.2.59)$$

3^{eme} étape : On étend la fonction f à \mathbb{R}^2 .

Par le lemme du d''' (qui concerne la résolution des équations $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$ voir le texte [Do], p. 46), il existe une fonction $k \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$w = \frac{\partial k}{\partial \bar{z}}. \quad (5.2.60)$$

On pose $g = fe^{-k}$ et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial fe^{-k}}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}e^{-k} - \frac{\partial k}{\partial \bar{z}}e^{-k}f \\ &= we^{-k} - we^{-k}f \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.2.61)$$

Par conséquent, la fonction g est analytique sur \mathbb{R}^2 privé de $z_h + \mathcal{L}$.

Si $m \in z_h + \mathcal{L}$ alors $\phi(m) = 0$ et puisque ϕ est C^∞ , on a $\phi = O(z - m)$. La fonction ϕ_h s'annule en m , mais c'est un zéro simple (cf 3.1.6) par conséquent $\phi_h^{-1} = O(|z - m|^{-1})$ et on a $f = O(1)$ au voisinage de m donc $g = O(1)$.

Par un résultat classique sur les développements en série de Laurent, on

conclut que g se prolonge en une fonction analytique en m . On peut donc prolonger g en une fonction analytique sur \mathbb{C} .

Puisque $f = ge^k$, la fonction f s'étend à \mathbb{R}^2 .

4^{eme} étape : On montre que g ne s'annule pas.

La fonction g est entière, elle possède donc des zéros discrets. Il existe z_l tel que le parallélogramme, dont les sommets sont :

$$z_l, z_l + r, z_l + r + (w + iu) \text{ et } z_l + (w + iu), \quad (5.2.62)$$

ne rencontre aucun zéro de g .

Le parallélogramme est appelé $\partial\mathcal{P}$; l'intérieur du parallélogramme est appelé \mathcal{P} .

Le nombre n de zéros à l'intérieur du parallélogramme \mathcal{P} est égal à :

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{P}} \frac{\frac{\partial g}{\partial z}(z)}{g(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{P}} \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(z)}{f(z)} dz \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{P}} -\frac{\partial k}{\partial z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{P}} -\frac{\partial k}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (5.2.63)$$

L'intégrale de $\frac{\frac{\partial f}{\partial z}(z)}{f(z)}$ sur le bord $\partial\mathcal{P}$ est nulle car f est une fonction \mathcal{L} -périodique.

Maintenant, si ω est une 1-forme différentielle, alors :

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \omega = \int_{\mathcal{P}} d\omega. \quad (5.2.64)$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{P}} -\frac{\partial k}{\partial z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{P}} d\left(-\frac{\partial k}{\partial z} dz\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{P}} -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial k}{\partial z} d\bar{z} \wedge dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{P}} -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial k}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{P}} -\frac{\partial w}{\partial z} d\bar{z} \wedge dz. \end{aligned} \quad (5.2.65)$$

La fonction w est une fonction \mathcal{L} -périodique ; par conséquent la fonction $\frac{\partial w}{\partial z}$ est une fonction \mathcal{L} -périodique d'intégrale nulle sur \mathcal{P} . La précédente intégrale est donc nulle.

On a donc $n = 0$ et la fonction g ne s'annule pas sur \mathbb{R}^2 .

5^{eme} étape : On obtient l'écriture $\phi = \phi_{h_2} e^{v_2}$ avec v_2 fonction \mathcal{L} -périodique. Puisque $f = ge^k$, la fonction f ne s'annule pas sur \mathbb{R}^2 . Puisque \mathbb{R}^2 est simplement connexe, il existe une fonction C^∞ à valeur complexe u telle que : $f = e^u$.

La fonction u a priori n'est pas périodique sur \mathbb{R}^2 ; cependant la fonction f est périodique et C^∞ ; on a donc :

$$\begin{cases} e^{u(x+r,y)-u(x,y)} = 1 \\ e^{u(x+w,y+u)-u(x,y)} = 1. \end{cases} \quad (5.2.66)$$

Par conséquent, il existe deux entiers relatifs n_1 et n_2 tels que :

$$\begin{cases} u(x+r, y) = u(x, y) + 2\pi i n_1 \\ u(x+w, y+u) = u(x, y) + 2\pi i n_2. \end{cases} \quad (5.2.67)$$

La fonction

$$v(z) = u(z) - 2\pi i [n_1 u x + (n_2 r - n_1 w) y] \quad (5.2.68)$$

est \mathcal{L} -périodique. On a donc :

$$\begin{aligned} \phi(z) &= f(z) \phi_h(z) \\ &= e^{v(z) + 2\pi i [n_1 u x + (n_2 r - n_1 w) y]} \phi_h(z) \\ &= e^{v(z)} e^{2\pi i [n_1 u x - (n_1 w - n_2 r) y]} \phi_h(z) \\ &= D^{-1} e^{v(z)} \phi_{h-n_2 r + n_1(w+iu)}(z) \end{aligned} \quad (5.2.69)$$

avec $|D| = 1$. Il existe donc $d \in \mathbb{C}$ tel que $D = e^d$; on a donc :

$$\phi(z) = e^{v(z)-d} \phi_{h-n_2 r + n_1(w+iu)}(z) \quad (5.2.70)$$

On pose : $h_2 = h - n_2 r + n_1(w + iu)$ et $v_2 = v - d$, et on réécrit ϕ sous la forme :

$$\phi(z) = e^{v_2(z)} \phi_{h_2}(z) \quad (5.2.71)$$

où v_2 est une fonction C^∞ , \mathcal{L} -périodique.

6^{eme} étape : On utilise l'expression précédente pour ϕ et on obtient la réécriture suivante des équations (5.2.55) :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_2}{\partial \bar{z}} &= \frac{(-a_y - \pi h_{2,x}) + i(a_x - \pi h_{2,y})}{2} \\ 0 &= 2\pi - \lambda + |\phi_{h_2}|^2 e^{2\operatorname{Re} v_2} + \operatorname{rot} \vec{a}. \end{cases} \quad (5.2.72)$$

On a les relations :

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} + i \frac{\partial v_2}{\partial y} = (-a_y - \pi h_{2,x}) + i(a_x - \pi h_{2,y}). \quad (5.2.73)$$

On sépare la partie imaginaire et la partie réelle dans l'équation précédente :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \operatorname{Im} v_2}{\partial y} + \frac{\partial \operatorname{Re} v_2}{\partial x} &= -a_y - \pi h_{2,x} \\ \frac{\partial \operatorname{Im} v_2}{\partial x} + \frac{\partial \operatorname{Re} v_2}{\partial y} &= a_x - \pi h_{2,y}, \end{cases} \quad (5.2.74)$$

qui nous donne l'expression du potentiel vecteur :

$$\begin{cases} a_y &= -\pi h_{2,x} - \frac{\partial \operatorname{Re} v_2}{\partial x} + \frac{\partial \operatorname{Im} v_2}{\partial y} \\ a_x &= \pi h_{2,y} + \frac{\partial \operatorname{Re} v_2}{\partial y} + \frac{\partial \operatorname{Im} v_2}{\partial x}. \end{cases} \quad (5.2.75)$$

7^{eme} étape : On précise la forme de v_2 .

Par hypothèse $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$ et donc $\operatorname{div} \vec{a} = 0$; calculons cette divergence avec l'expression précédente :

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} \vec{a} \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} v_2}{\partial y} + \frac{\partial \operatorname{Im} v_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \operatorname{Re} v_2}{\partial x} + \frac{\partial \operatorname{Im} v_2}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \operatorname{Re} v_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \operatorname{Re} v_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \operatorname{Im} v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{Im} v_2}{\partial y^2} \\ &= \Delta \operatorname{Im} v_2. \end{aligned} \quad (5.2.76)$$

Puisque le noyau de Δ est constitué des fonctions constantes, la partie imaginaire de v_2 est constante égale à c . On pose :

$$\psi = \operatorname{Re} v_2 \quad (5.2.77)$$

et on a donc $v_2 = \psi + ic$.

8^{eme} étape : On montre que ϕ s'annule en z_0 .

Les équations (5.2.75) se réduisent donc à :

$$\begin{aligned} a_y &= -\pi h_{2,x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ a_x &= \pi h_{2,y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.2.78)$$

Puisque le couple (ϕ, \vec{a}) appartient à \mathcal{A} , l'intégrale du potentiel vecteur \vec{a} sur Ω est nulle. Puisque ψ est une fonction C^∞ , \mathcal{L} -périodique sur \mathbb{R}^2 ,

l'intégrale sur Ω des fonctions $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ est aussi nulle.

Cela ne peut se faire que si $(h_{2,x}, h_{2,y}) = (0, 0)$. On a donc $\phi_{h_2} = \phi_0$ et $z_{h_2} = z_0$.

9^{eme} étape : On précise la forme de ψ .

Exprimons $\text{rot } \vec{a}$ avec la formule (5.2.78) :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &= \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ &= -\Delta \psi. \end{aligned} \quad (5.2.79)$$

La fonction ψ est alors solution de l'équation

$$0 = 2\pi - \lambda + |\phi_0|^2 e^{2\psi} - \Delta \psi. \quad (5.2.80)$$

La fonction $\eta = 2\psi$ est alors solution de l'équation

$$0 = 2(2\pi - \lambda) + 2|\phi_0|^2 e^\eta - \Delta \eta. \quad (5.2.81)$$

On sait par le théorème 5.2.1 que l'équation (5.2.81) possède une unique solution. L'équation (5.2.80) possède donc aussi une unique solution que l'on note f_s .

On donc bien les solutions annoncées.

CQFD

Pour la suite, on note

$$\begin{aligned} \phi_s &= \phi_0 e^{f_s} \\ \vec{a}_s &= \left(\frac{\partial f_s}{\partial y}, -\frac{\partial f_s}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (5.2.82)$$

où f_s est l'unique solution de

$$\lambda - 2\pi = |\phi_0|^2 e^{2\psi} - \Delta \psi. \quad (5.2.83)$$

Corollaire 5.2.8 . La fonction $m_F(\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \inf_{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}} F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a})$ est égale à :

$$\begin{cases} \frac{\lambda^2}{4} & \text{si } \lambda \leq 2\pi \\ \lambda\pi - \pi^2 & \text{si } \lambda > 2\pi. \end{cases} \quad (5.2.84)$$

Preuve. Le théorème 3.5.3 nous dit précisément que $m_F(\lambda, k) = \frac{\lambda^2}{4}$ si $\lambda \leq 2\pi$.

La formule (5.2.43) nous indique que $m_F(\lambda, k) \geq \lambda\pi - \pi^2$ car $A_+ \geq 0$.

Si $\lambda > 2\pi$, le théorème 5.2.7 nous indique que :

$$F_{\lambda,k}(\phi_s, \vec{a}_s) = \lambda\pi - \pi^2 + A_+(\phi_s, \vec{a}_s) = \lambda\pi - \pi^2. \quad (5.2.85)$$

Donc si $\lambda > 2\pi$, alors $m_F(\lambda, k) = \lambda\pi - \pi^2$.

CQFD

Proposition 5.2.9 . Si $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, pour $\lambda \in]2\pi, 2\pi + \epsilon_0]$, le couple bifurqué (ϕ_+, \vec{a}_+) soit de la forme (5.2.53).

Preuve. Il nous suffit de démontrer que le couple

$$(\phi_0 e^\psi, (\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x})) \quad (5.2.86)$$

où ψ est la solution régulière de l'équation

$$\lambda - 2\pi = |\phi_0|^2 e^{2\psi} - \Delta \psi \quad (5.2.87)$$

possède une norme H^1 qui tend vers 0 quand λ tend vers 2π .

En effet le théorème 4.1.10 nous dit que toutes les solutions non triviales dans un voisinage de $(0, 0)$ dans \mathcal{A} des équations (3.3.21) sont pour $\lambda > 2\pi$ proche de 2π des solutions bifurquées.

Le théorème 5.2.1 nous indique que la solution ψ de l'équation (5.2.87) est C^∞ car $|\phi_0|^2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R})$ et $C^\infty(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R}) = \cap_{n \geq 0} H^n(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, \mathbb{R})$.

On pose $\psi = \frac{1}{2}u + \frac{\ln(\lambda - 2\pi)}{2}$, la fonction u est C^∞ et vérifie l'équation

$$-\Delta u + 2(\lambda - 2\pi)|\phi_0|^2 e^u = 2(\lambda - 2\pi). \quad (5.2.88)$$

La fonction u est donc solution de l'équation (5.2.1) avec $A = 2(\lambda - 2\pi)$ et $h = 2(\lambda - 2\pi)|\phi_0|^2$.

La proposition 5.2.3 nous indique que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \phi_A(t, B) \quad (5.2.89)$$

avec $t = \|h\|_{L^2}$, $B = \int_\Omega h$ et ϕ_A est défini à l'équation (5.2.13).

Dans notre cas, cela donne

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t & = & 2(\lambda - 2\pi) \| |\phi_0|^2 \|_{L^2} = 2(\lambda - 2\pi) \sqrt{I} \\ B & = & 2(\lambda - 2\pi) \\ \phi_A(t, B) & = & 4c_0(\lambda - 2\pi) + 4c_0(\lambda - 2\pi) \sqrt{I} \exp[8c_0(\lambda - 2\pi) \sqrt{I}] \\ & = & O(\lambda - 2\pi). \end{array} \right. \quad (5.2.90)$$

La constante I est définie à l'équation (4.1.49) et on utilise que ϕ_0 est par définition un vecteur unitaire.

L'expression ϕ_A tend vers 0 quand λ tend vers 2π , il en est donc de même

de $\|u\|_{L^\infty}$.

La fonction u étant C^∞ on peut intégrer librement et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |-\Delta u|^2 &= 4(\lambda - 2\pi)^2 \int_{\Omega} [1 - |\phi_0|^2 e^u]^2 \\ &= 2(\lambda - 2\pi)^2 [1 + e^{2O(\|u\|_{L^\infty})}] \\ &= (\lambda - 2\pi)^2 O(1). \end{aligned} \quad (5.2.91)$$

On en conclut que $\|\Delta u\|_{L^2} = O(\lambda - 2\pi)$. Vu que l'on a aussi un contrôle sur la norme L^∞ , on obtient facilement

$$\|u\|_{H^2} = O(\lambda - 2\pi) \quad (5.2.92)$$

La définition (5.2.82) nous permet de dire que

$$\|\vec{a}\|_{H^1} = \left\| \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\|_{H^1} = O(\lambda - 2\pi) \quad (5.2.93)$$

On a donc le contrôle sur le potentiel vecteur.

L'expression de ϕ (cf (5.2.82)) est

$$\phi_0 \sqrt{\lambda - 2\pi} e^{\frac{u}{2}} \quad (5.2.94)$$

et sa norme H^1 est trivialement estimée par $O(\sqrt{\lambda - 2\pi})$.

CQFD

Lemme 5.2.10 . Supposons $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$; si le couple (ϕ, \vec{a}) minimise la fonctionnelle $F_{\lambda,k}$, alors :

$$\int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 \leq 2(\lambda\pi - 2\pi^2). \quad (5.2.95)$$

Preuve.

1^{ère} étape :

Montrons le résultat pour $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas, le couple minimisant (ϕ, \vec{a}) est de la forme $(e^{ic}\phi_s, \vec{a}_s)$ avec $c \in \mathbb{R}$. Le potentiel vecteur est donc forcément égal à \vec{a}_s .

Si on intègre sur Ω l'équation (5.2.83), on obtient :

$$\int_{\Omega} |\phi_s|^2 = \lambda - 2\pi. \quad (5.2.96)$$

L'équation (5.2.83) nous donne également :

$$|\phi_s|^4 = (\lambda - 2\pi)^2 + 2(\lambda - 2\pi)\Delta f_s + |\Delta f_s|^2. \quad (5.2.97)$$

Par conséquent, on a la relation :

$$\int_{\Omega} |\phi_s|^4 = (\lambda - 2\pi)^2 + \int_{\Omega} |\Delta f_s|^2. \quad (5.2.98)$$

Or on sait par (5.2.79) que : $\text{rot } \vec{a}_s = -\Delta f_s$; par conséquent, on a la relation :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\lambda - |\phi_s|^2)^2 &= \lambda^2 - 2\lambda \int_{\Omega} |\phi_s|^2 + \int_{\Omega} |\phi_s|^4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda(\lambda - 2\pi) + (\lambda - 2\pi)^2 + \int_{\Omega} |\Delta f_s|^2 \\ &= (\lambda - (\lambda - 2\pi))^2 + \int_{\Omega} |\Delta f_s|^2 \\ &= (2\pi)^2 + \int_{\Omega} |\Delta f_s|^2 \\ &= (2\pi)^2 + \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}_s|^2. \end{aligned} \quad (5.2.99)$$

L'état (ϕ_s, \vec{a}_s) défini au théorème 5.2.7 vérifie :

$$\int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi_s + (\vec{A}_0 + \vec{a}_s)\phi_s\|^2 + \frac{1}{4}(\lambda - |\phi_s|^2)^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}_s|^2 = \lambda\pi - \pi^2. \quad (5.2.100)$$

Par conséquent, on a l'inégalité :

$$\pi^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}_s|^2 \leq \lambda\pi - \pi^2, \quad (5.2.101)$$

qui implique l'inégalité :

$$\int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}_s|^2 \leq 2[\lambda\pi - 2\pi^2]. \quad (5.2.102)$$

2^{eme} étape :

Il suffit d'appliquer la proposition 3.4.10 pour obtenir le résultat voulu.

CQFD

Si $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, la formule (5.2.43) nous donne des résultats moins précis mais qui permettront néanmoins de décrire la structure qualitative du diagramme des phases.

Théorème 5.2.11 . On suppose $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La fonction $m_F(\lambda, k) = \inf_{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}} F_{\lambda, k}(\phi, \vec{a})$ vérifie

$$\begin{cases} m_F(\lambda, k) = \frac{\lambda^2}{4} & si \quad \lambda \leq 2\pi \\ \lambda\pi - \pi^2 \leq m_F(\lambda, k) \leq \pi^2 + (\lambda\pi - 2\pi^2)(k^2 + \frac{1}{2}) & si \quad \lambda > 2\pi. \end{cases} \quad (5.2.103)$$

Preuve. L'égalité $m_F(\lambda, k) = \frac{\lambda^2}{4}$ si $\lambda \leq 2\pi$ provient du théorème 3.5.3.

La fonctionnelle $F_{\lambda,k}$ vérifie l'inégalité :

$$\begin{aligned} F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) &= \lambda\pi - \pi^2 + A_+(\phi, \vec{a}) + \frac{1}{2}(k^2 - \frac{1}{2}) \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2 \\ &\geq \lambda\pi - \pi^2 + \frac{1}{2}(k^2 - \frac{1}{2}) \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2 \\ &\geq \lambda\pi - \pi^2. \end{aligned} \quad (5.2.104)$$

On en déduit l'inégalité : $\lambda\pi - \pi^2 \leq m_F(\lambda, k)$.

L'égalité (5.2.104), combinée avec le lemme 5.2.10, nous donne :

$$\begin{aligned} F_{\lambda,k}(\phi_s, \vec{a}_s) &= \lambda\pi - \pi^2 + \frac{1}{2}(k^2 - \frac{1}{2}) \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}_s|^2 \\ &\leq \lambda\pi - \pi^2 + (k^2 - \frac{1}{2})(\lambda\pi - 2\pi^2) \\ &\leq \pi^2 + (\lambda\pi - 2\pi^2)[1 + (k^2 - \frac{1}{2})] \\ &\leq \pi^2 + (\lambda\pi - 2\pi^2)(k^2 + \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (5.2.105)$$

Et donc on a l'inégalité : $m_F(\lambda, k) \leq \pi^2 + (\lambda\pi - 2\pi^2)(k^2 + \frac{1}{2})$. **CQFD**

La formule suivante va nous permettre d'écrire les développements asymptotiques de l'énergie pour $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Théorème 5.2.12 . On a la relation suivante entre K et I :

$$I - 4K = 1 \quad (5.2.106)$$

où K et I sont les constantes définies aux équations (4.1.49) et (4.1.50).

Preuve. Au corollaire 5.2.8, on a calculé explicitement $m_F(\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}})$ pour tout λ . On a obtenu :

$$m_F(\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{cases} \frac{\lambda^2}{4} & \text{si } \lambda < 2\pi, \\ \lambda\pi - \pi^2 & \text{si } \lambda \geq 2\pi. \end{cases} \quad (5.2.107)$$

Par la proposition 5.2.9 les états du théorème 5.2.7 sont des états bifurqués pour λ proche de 2π . On peut donc utiliser le chapitre III.

Ces résultats s'écrivent aussi en utilisant la variable ϵ définie à l'équation (4.1.9) et les fonction F_S et F_N défini à l'équation (4.2.3)

$$\begin{cases} F_N(\epsilon, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{(2\pi+\epsilon)^2}{4}, \\ F_S(\epsilon, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \epsilon\pi + \pi^2. \end{cases} \quad (5.2.108)$$

On obtient alors :

$$(F_S - F_N)(\epsilon, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{-\epsilon^2}{4}. \quad (5.2.109)$$

Mais on sait par le théorème 4.2.1 que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(F_S - F_N)(\epsilon, \frac{1}{\sqrt{2}})}{\epsilon^2} = -\frac{1}{4(I - \frac{2}{k^2}K)} = -\frac{1}{4(I - 4K)}. \quad (5.2.110)$$

En égalisant, on obtient la relation : $I - 4K = 1$.

CQFD

Corollaire 5.2.13 . *La condition $I - \frac{2}{k^2}K > 0$ des théorèmes 4.1.10, 4.2.1 et 4.3.1 est vérifiée, si $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Preuve. La fonction $k \rightarrow I - \frac{2}{k^2}K$ est une fonction croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty[$ et prend la valeur 1 en $\frac{1}{\sqrt{2}}$; par conséquent, elle est strictement positive sur cet intervalle de définition.

CQFD

5.3 Le diagramme des phases, l'état normal

Dans cette section, on trouve les valeurs de (k, H_{ext}) pour lesquelles $\mathcal{E}_{k, H_{ext}}^V = \frac{1}{4}$. Physiquement cela correspond à une énergie qui est atteinte par un état normal. On aura alors résolu le problème 2.4.14.

On définit les ensembles :

$$\begin{aligned} F_k &= \{H_{ext} \text{ tel que } \forall H_{int} \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{\lambda^2}m_F(\lambda, k) + \frac{1}{2}(H_{ext} - H_{int})^2 \geq \frac{H_{ext}^2}{2}\}, \\ G_k &= \{H_{ext} \text{ tel que } \forall H_{int} \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{\lambda^2}m_F(\lambda, k) + \frac{1}{2}(H_{ext} - H_{int})^2 \geq \frac{1}{4}\}. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Par rapport à la définition 2.4.17, (k, H_{ext}) correspond à un état pur si et seulement si $H_{ext} \in F_k$. (k, H_{ext}) correspond à un état normal si et seulement si $H_{ext} \in G_k$.

Dans la section 4.4, on a montré que les couples vérifiant les équations de Ginzburg-Landau sont de norme assez petite si k est assez grand. On montrera ici un résultat un peu différent pour les couples minimisants la fonctionnelle mais dans un domaine de valeur de k plus large.

On peut aussi voir ce théorème comme une extension du théorème 3.5.3.

Théorème 5.3.1 . $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall (\phi, \vec{a})$ minimisant la fonctionnelle $F_{\lambda, k}$ avec $\lambda \leq 2\pi + \delta$ et $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}} - \delta$, on a :

$$\|\phi\|_{H^1} + \|\vec{a}\|_{H^1} \leq \epsilon. \quad (5.3.2)$$

Preuve.

1^{ere} étape :

On sait que $F_{\lambda,k}(0,0) = \frac{\lambda^2}{4}$; donc, si (ϕ, \vec{a}) minimise $F_{\lambda,k}$, alors $F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) \leq \frac{\lambda^2}{4}$.

On sait par le théorème 3.3.10 que le couple (ϕ, \vec{a}) est C^∞ et par le théorème 3.4.2 que $|\phi| \leq \sqrt{\lambda}$.

On a alors l'inégalité

$$\frac{k^2}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 \leq F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) \leq \frac{\lambda^2}{4}, \quad (5.3.3)$$

qui nous donne :

$$\int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 \leq \frac{\lambda^2}{2k^2}. \quad (5.3.4)$$

On obtient donc dans notre cas :

$$\int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 \leq \frac{(2\pi + \delta)^2}{(1 - \sqrt{2}\delta)^2}. \quad (5.3.5)$$

Par conséquent, la norme H^1 de \vec{a} est bornée par une constante ne dépendant que de δ .

2^{eme} étape : On majore la fonctionnelle A_+ .

Par le théorème 3.5.1, on a la relation :

$$\lambda\pi - \pi^2 + A_+(\phi, \vec{a}) + \frac{1}{2}(k^2 - \frac{1}{2}) \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 \leq \frac{\lambda^2}{4} \quad (5.3.6)$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$A_+(\phi, \vec{a}) + \frac{1}{2}(k^2 - \frac{1}{2}) \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 \leq \frac{(\lambda - 2\pi)^2}{4}. \quad (5.3.7)$$

Puisque le couple (ϕ, \vec{a}) minimise $F_{\lambda,k}$, on a la majoration, si $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}} - \delta$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - k^2) \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 &\leq \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - [\frac{1}{\sqrt{2}} - \delta]^2) \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \vec{a}|^2 \\ &\leq \frac{\delta}{\sqrt{2}} \frac{(2\pi + \delta)^2}{(1 - \sqrt{2}\delta)^2}. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

On obtient donc la majoration :

$$A_+(\phi, \vec{a}) \leq \frac{(\lambda - 2\pi)^2}{4} + \frac{\delta}{\sqrt{2}} \frac{(2\pi + \delta)^2}{(1 - \sqrt{2}\delta)^2}. \quad (5.3.9)$$

3^{eme} étape : On majore le terme $\text{rot } \vec{a} + |\phi|^2$.

Compte tenu de la définition de A_+ (cf (5.2.44)), on a trivialement

$$\int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a} + |\phi|^2 + 2\pi - \lambda|^2 \leq (\lambda - 2\pi)^2 + \frac{4\delta}{\sqrt{2}} \frac{(2\pi + \delta)^2}{(1 - \sqrt{2}\delta)^2}. \quad (5.3.10)$$

Maintenant on développe la somme à l'intérieur de l'intégrale et on obtient

$$2(2\pi - \lambda) \int_{\Omega} |\phi|^2 + \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a} + |\phi|^2|^2 \leq \frac{4\delta}{\sqrt{2}} \frac{(2\pi + \delta)^2}{(1 - \sqrt{2}\delta)^2}. \quad (5.3.11)$$

Puisque le couple (ϕ, \vec{a}) minimise $F_{\lambda,k}$ on a $|\phi| \leq \sqrt{\lambda}$. On en déduit, si $\lambda \leq 2\pi + \delta$:

$$(\lambda - 2\pi) \int_{\Omega} |\phi|^2 \leq \delta \int_{\Omega} \lambda \leq \delta(2\pi + \delta). \quad (5.3.12)$$

Les équations (5.3.12) et (5.3.11) nous donnent la majoration :

$$\int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a} + |\phi|^2|^2 \leq \frac{4\delta}{\sqrt{2}} \frac{(2\pi + \delta)^2}{(1 - \sqrt{2}\delta)^2} + 2\delta(2\pi + \delta). \quad (5.3.13)$$

On pose :

$$\eta(\delta) = \frac{4\delta}{\sqrt{2}} \frac{(2\pi + \delta)^2}{(1 - \sqrt{2}\delta)^2} + 2\delta(2\pi + \delta). \quad (5.3.14)$$

4^{eme} étape : Obtention du contrôle H^1 sur \vec{a} :

Le couple (ϕ, \vec{a}) est C^∞ donc on peut intégrer librement.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\phi|^2 &= \frac{\int_{\Omega} \text{rot } \vec{a} + |\phi|^2}{\sqrt{\int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a} + |\phi|^2|^2}} \\ &\leq \sqrt{\int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a} + |\phi|^2|^2} \\ &\leq \sqrt{\eta(\delta)}. \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

Par conséquent, on a un contrôle sur la norme L^2 de ϕ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2 &\leq \|\text{rot } \vec{a}\|_{L^2}^2 \\ &\leq (\|\text{rot } \vec{a} + |\phi|^2\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^4}^2)^2 \\ &\leq (\sqrt{\eta(\delta)} + \sqrt{\int_{\Omega} |\phi|^4})^2 \\ &\leq (\sqrt{\eta(\delta)} + \sqrt{\lambda} \sqrt{\int_{\Omega} |\phi|^2})^2 \\ &\leq (\sqrt{\eta(\delta)} + \sqrt{2\pi + \delta} \sqrt[4]{\eta(\delta)})^2. \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

5^{eme} **étape** : *Obtention du contrôle H^1 sur ϕ .*

L'inéquation (4.4.31) que l'on réécrit ci-dessous

$$\|(i\vec{\nabla} + \vec{A}_0)\phi\|_{L^2} \leq \|\vec{a}\|_{L^4}\|\phi\|_{L^4} + \sqrt{2\|\vec{a}\|_{L^4}^2\|\phi\|_{L^4}^2 + \lambda\|\phi\|_{L^2}^2} \quad (5.3.17)$$

est vraie pour notre couple (ϕ, \vec{a}) puisqu'il est solution des équations (3.3.21).

La norme L^2 de ϕ est contrôlée par l'équation (5.3.15). La norme L^4 de \vec{a} est contrôlée par l'équation (5.3.16) et le théorème (2.2.3). La norme L^4 de ϕ est contrôlée par l'inégalité

$$\|\phi\|_{L^4} \leq \sqrt[4]{2\pi + \delta} \sqrt{\|\phi\|_{L^2}} \quad (5.3.18)$$

et l'équation (5.3.15).

On a donc bien montré le résultat voulu ; il suffit de prendre δ assez petit.

CQFD

Le théorème suivant dit que si H_{ext} est proche de k et si (H_{int}, ϕ, \vec{a}) minimise la fonctionnelle $E_{k, H_{ext}}^V$ alors le champ H_{int} est proche de k .

On rappelle que $\lambda = \frac{2\pi k}{H_{int}}$.

Théorème 5.3.2 . *Soit $k_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}$ fixé. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $H_{ext} \in [k - \eta, k]$ et $k \geq k_0$ et H_{int} est un champ vérifiant $\mathcal{E}_{k, H_{ext}}^V = G_{k, H_{ext}}^V(H_{int})$ alors $|H_{int} - k| \leq \epsilon$ et $\lambda < 2\pi + \epsilon$.*

Preuve.

1^{ere} **étape** :

On écrit $H_{ext} = k - \delta$; puisque $H_{ext} \leq k$ on a $\delta \geq 0$. Soit H_{int} un champ minimisant la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \mapsto \mathbb{R}_+ \\ H_{int} & \mapsto G_{k, H_{ext}}^V(H_{int}) \end{cases} \quad (5.3.19)$$

qui existe par le théorème 3.4.6.

On a alors, puisque $E_{k, H_{ext}}^V(H_{ext}, 0, 0) = \frac{1}{4}$, l'inégalité :

$$G_{k, H_{ext}}^V(H_{int}) = \frac{1}{\lambda^2} m_F(\lambda, k) + \frac{1}{2} (H_{int} - H_{ext})^2 \leq \frac{1}{4}. \quad (5.3.20)$$

Le théorème 3.4.13 et l'inégalité : $H_{ext} \leq k$ nous donnent :

$$H_{int} \leq k. \quad (5.3.21)$$

On écrit maintenant $H_{int} = k - \omega$ avec $\omega \geq 0$.

L'inégalité $H_{int} \leq H_{ext}$ nous donne $\omega \geq \delta$.

2^{eme} étape :

L'inégalité $m_F(\lambda, k) \geq \lambda\pi - \pi^2$ du théorème 5.2.11 implique :

$$\frac{1}{\lambda^2}[\lambda\pi - \pi^2] + \frac{1}{2}(H_{int} - H_{ext})^2 \leq \frac{1}{4}. \quad (5.3.22)$$

Cela se simplifie en

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(H_{int} - H_{ext})^2 &\leq \frac{(\lambda - 2\pi)^2}{4\lambda^2} \\ &\leq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{H_{int}}{k}\right)^2 \text{ puisque } \lambda = \frac{2\pi k}{H_{int}} \\ &\leq \frac{1}{4k^2}(k - H_{int})^2. \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

L'inégalité (5.3.23) se réécrit

$$\frac{(\omega - \delta)^2}{2} \leq \frac{1}{4k^2}\omega^2. \quad (5.3.24)$$

En prenant la racine carré et en utilisant le fait que $\omega - \delta \geq 0$ on obtient

$$\omega - \delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}k}\omega \quad (5.3.25)$$

qui implique alors

$$\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}k}\right]\omega \leq \delta. \quad (5.3.26)$$

3^{eme} étape :

Par l'inégalité (5.3.26) on a

$$\omega \leq \frac{\eta}{\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4k_0^2}\right]}. \quad (5.3.27)$$

Donc on a l'inégalité :

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2\pi k}{H_{int}} \\
&= \frac{2\pi k}{k - \omega} \\
&= \frac{2\pi}{1 - \frac{\omega}{k}} \\
&\leq \frac{2\pi}{1 - \frac{\eta}{k[\frac{1}{2} - \frac{1}{4k_0^2}]}} \\
&\leq \frac{2\pi}{1 - \frac{\eta}{k_0[\frac{1}{2} - \frac{1}{4k_0^2}]}}.
\end{aligned} \tag{5.3.28}$$

Par conséquent, en prenant η assez petit, on a : $\lambda \leq 2\pi + \epsilon$. **CQFD**

Remarque 5.3.3 Cette localisation du problème n'a pas à notre connaissance été effectuée par Chapman dans [Chap].

Le résultat suivant est énoncé dans Chapman ([Chap], p. 463) mais la démonstration reste formelle.

Théorème 5.3.4 .(Bifurcation d'Abrikosov) Pour tout $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il existe $u > 0$ tel que, si $H_{ext} \in [k - u, k]$, alors le minimum $\mathcal{E}_{k, H_{ext}}^V$ est atteint sur le couple bifurqué. On a, pour $H_{ext} < k$, l'estimation :

$$\mathcal{E}_{k, H_{ext}}^V = \frac{1}{4} - (k - H_{ext})^2 \frac{1}{2I(2k^2 - 1)} + o(k - H_{ext})^2 \tag{5.3.29}$$

où le reste $o(k - H_{ext})^2$ est une fonction analytique.

Preuve. On écrit $H_{ext} = k - \delta$, $H_{int} = k - \omega$ et on utilise les notations $\lambda = 2\pi + \epsilon$ et $\lambda = \frac{2\pi k}{H_{int}}$ définies aux équations (4.1.9) et (2.4.14).

Si H_{ext} est suffisamment proche de k , la quantité λ devient proche de 2π par le théorème 5.3.2 et le théorème 5.3.1 nous donne une localisation des couples minimisants la fonctionnelle $E_{k, H_{ext}}^V$.

Par conséquent, si H_{ext} est suffisamment proche de k alors les couples minimisants la fonctionnelle $E_{k, H_{ext}}^V(H_{int}, \phi, \vec{a})$ sont les couples bifurqués définis au théorème 4.1.10.

Le couple bifurqué $(\phi_+(\epsilon, k), \vec{a}_+(\epsilon, k))$ défini au théorème 4.1.10 vérifie :

$$\mathcal{E}_{k, H_{ext}}^V = E_{k, H_{ext}}^V(H_{int}, \phi_+(\epsilon, k), \vec{a}_+(\epsilon, k)) \tag{5.3.30}$$

pour un certain champ H_{int} proche de k .

La preuve du théorème 4.2.1 nous indique alors que :

$$E_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi_+, \vec{a}_+) = \frac{1}{\lambda^2} [F_N(\lambda) + \epsilon^2 \left(\frac{-1}{4(I - \frac{2}{k^2}K)} \right) + o(\epsilon^2)] + \frac{1}{2} (H_{ext} - H_{int})^2. \quad (5.3.31)$$

On simplifie cette expression en utilisant le théorème 5.3.2. On a :

$$\begin{aligned} E_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi_+, \vec{a}_+) &= \frac{1}{4} + \left(\frac{\lambda - 2\pi}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{-1}{4(I - \frac{2}{k^2}K)} \right) \\ &+ o(H_{int} - k)^2 + \frac{1}{2} (H_{ext} - H_{int})^2 \\ &= \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{H_{int}}{k} \right)^2 \left(\frac{-1}{4(I - \frac{2}{k^2}K)} \right) \\ &+ o(H_{int} - k)^2 + \frac{1}{2} (H_{ext} - H_{int})^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\omega^2}{k^2} \left(\frac{-1}{4(I - \frac{2}{k^2}K)} \right) \\ &+ o(\omega^2) + \frac{1}{2} (\omega - \delta)^2. \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

La fonction $F_S(\epsilon, k)$ est analytique par rapport à ϵ donc $E_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi_+, \vec{a}_+)$ est analytique par rapport à ω . On cherche le minimum $\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V$. Par conséquent, on dérive par rapport à ω :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} E_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi_+, \vec{a}_+) &= \frac{2\omega}{k^2} \left(\frac{-1}{4(I - \frac{2}{k^2}K)} \right) \\ &+ o(\omega) + (\omega - \delta) \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

où $o(\omega)$ est une quantité qui est analytique par rapport à ω .

On utilise la formule $I - 4K = 1$ du théorème 5.2.12. L'équation à résoudre est alors

$$\begin{aligned} \delta &= \omega \left[1 + \frac{2}{k^2} \left(\frac{-1}{4(I - \frac{2}{k^2}K)} \right) \right] + o(\omega) \\ &= \omega \left[\frac{I(2k^2 - 1)}{2(k^2 I - 2K)} \right] + o(\omega). \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

Les quantités $2k^2 - 1$, I et $k^2 I - 2K$ sont strictement positives par l'hypothèse $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, le lemme 4.1.8 et l'hypothèse 4.1.9 (qui est vérifiée par le corollaire 5.2.13).

On peut appliquer le théorème des fonctions implicites (version analytique) et on obtient

$$\omega(\delta) = \frac{[2k^2 I - 4K]\delta}{I(2k^2 - 1)} + o(\delta), \quad (5.3.35)$$

le $o(\delta)$ étant analytique.

On calcule l'énergie avec cette valeur

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{k,H_{ext}}^V &= E_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi_+, \vec{a}_+) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\omega^2}{k^2} \left(\frac{-1}{4(I - \frac{2}{k^2}K)} \right) + \frac{1}{2}(\omega - \delta)^2 + o(\omega^2) \\
&= \frac{1}{4} + \left(\frac{[2k^2I - 4K]\delta}{I(2k^2 - 1)} \right)^2 \left(\frac{-1}{4k^2(I - \frac{2}{k^2}K)} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{[I - 4K]\delta}{I(2k^2 - 1)} \right)^2 + o(\delta^2) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{4k^4[I - \frac{2}{k^2}K]^2\delta^2}{I^2(2k^2 - 1)^2} \left(\frac{-1}{4k^2(I - \frac{2}{k^2}K)} \right) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{I^2(2k^2 - 1)^2} + o(\delta^2) \\
&= \frac{1}{4} + \delta^2 \left[-k^2I + 2K + \frac{1}{2} \right] \frac{1}{I^2(2k^2 - 1)^2} + o(\delta^2) \\
&= \frac{1}{4} + \delta^2 \left[-k^2I + \frac{I}{2} \right] \frac{1}{I^2(2k^2 - 1)^2} + o(\delta^2) \\
&= \frac{1}{4} - \delta^2 \frac{1}{2I(2k^2 - 1)} + o(\delta^2).
\end{aligned}$$

(5.3.36)

On a bien l'estimation voulue sur l'énergie.

CQFD

Théorème 5.3.5 . Soit H_{c2} l'application :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_+^* &\mapsto \mathbb{R}_+ \\
k &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ k & \text{si } k \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}
\end{aligned}$$

(5.3.37)

L'ensemble G_k est de la forme $[H_{c2}(k), \infty[$ et pour tout $H_{ext} \geq H_{c2}(k)$ le minimum de la fonctionnelle $E_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi, \vec{a})$ est atteint par l'état normal.

Preuve. Le théorème 5.1.7 nous donne le résultat si $k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Si $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $H_{ext} \in [k, +\infty[$, les théorèmes 5.1.4 et 5.1.3 nous indique que le minimum est atteint par l'état normal.

Supposons par l'absurde que le minimum de la fonctionnelle $E_{k,H_{ext}}^V$ en (k, H_{ext}) soit atteint par l'état normal avec $H_{ext} < k$ alors, par le théorème de monotonie 5.1.4 on sait que, si $H'_{ext} \in [H_{ext}, k]$ le minimum de la fonctionnelle $E_{k,H_{ext}}^V$ est atteint par l'état normal.

Or le théorème 5.3.4 nous indique que le minimum de la fonctionnelle n'est pas atteint sur l'état normal si H'_{ext} est assez proche de k ; c'est absurde. Donc G_k est de la forme indiquée. **CQFD**

Théorème 5.3.6 . Soit $k > 0$ fixé. Si $H_{ext} > H_{c2}(k)$ alors

$$\begin{cases} \forall H_{int} > 0, \forall (\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A} - \{(0, 0)\} \\ E_{k, H_{ext}}^V(H_{int}, \phi, \vec{a}) > \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (5.3.38)$$

Autrement dit l'état supraconducteur normal est l'unique état d'équilibre de la fonctionnelle.

Preuve. Soit $H_{ext} > H_{c2}(k)$ un champ magnétique. L'énergie de l'état normal est égale à $\frac{1}{4}$.

On a donc, puisque $H_{c2}(k) \in G_k$, l'inégalité :

$$\forall H_{int} > 0, \frac{1}{\lambda^2} m_F(\lambda, k) + \frac{1}{2} (H_{int} - H_{c2}(k))^2 \geq \frac{1}{4}. \quad (5.3.39)$$

En particulier, si $H_{int} = H_{c2}(k)$, cette inégalité implique :

$$\left(\frac{H_{c2}(k)}{2\pi k}\right)^2 m_F\left(\frac{2\pi k}{H_{c2}(k)}, k\right) \geq \frac{1}{4}. \quad (5.3.40)$$

Il faut démontrer que $\forall H_{int} > 0, \forall (\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A} - \{(0, 0)\}$, l'inégalité

$$\frac{1}{\lambda^2} F_{\lambda, k}(\phi, \vec{a}) + \frac{1}{2} (H_{ext} - H_{int})^2 > \frac{1}{4}, \quad (5.3.41)$$

est vérifiée.

Si $H_{int} \leq H_{c2}(k)$, alors on a trivialement :

$$(H_{int} - H_{c2}(k))^2 < (H_{int} - H_{ext})^2. \quad (5.3.42)$$

Par conséquent, l'inégalité (5.3.41) est démontrée pour $H_{int} \leq H_{c2}(k)$.

Supposons maintenant $H_{int} > H_{c2}(k)$.

Si $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A} - \{(0, 0)\}$, alors la contraposée du lemme 3.4.8 s'écrit

$$\int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2 \neq 0. \quad (5.3.43)$$

On a alors, par l'expression de D (cf (2.4.17)) et si $H_{int} > H_{c2}(k)$,

$$D_{\frac{2\pi k}{H_{c2}(k)}, k}(\phi, \vec{a}) < D_{\frac{2\pi k}{H_{int}}, k}(\phi, \vec{a}). \quad (5.3.44)$$

En combinant les équations (5.3.44) et (5.3.40), on obtient la relation :

$$\frac{1}{4} < D_{\frac{2\pi k}{H_{int}}, k}(\phi, \vec{a}). \quad (5.3.45)$$

On a donc bien montré que l'état normal est le seul état minimisant la fonctionnelle

$$\begin{aligned} E_{k, H_{ext}}^V : \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{A} &\mapsto \mathbb{R} \\ (H_{int}, \phi, \vec{a}) &\mapsto E_{k, H_{ext}}^V(H_{int}, \phi, \vec{a}) \end{aligned} \quad (5.3.46)$$

CQFD

5.4 Diagramme de phase, l'état supraconducteur pur

Passons à l'étude plus complexe de l'ensemble F_k .

Théorème 5.4.1 . *L'ensemble F_k est de la forme $]0, H_{c1}(k)]$ avec*

$$\begin{cases} H_{c1}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \geq H_{c1}(k) \geq \frac{1}{2k} & \text{si } k > \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (5.4.1)$$

De plus la fonction $H_{c1}(k)$ est une fonction décroissante de k .

Preuve.

1^{ere} étape :

On sait par le théorème 5.1.7 que, si $k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}] = F_k$. On a donc le résultat dans ce cas.

2^{eme} étape :

On suppose $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour que le minimum de la fonctionnelle $E_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi, \vec{a})$ soit atteint par l'état supraconducteur pur, il faut que :

$$\forall H_{int} > 0, G_{k,H_{ext}}^V(H_{int}) \geq \frac{H_{ext}^2}{2}. \quad (5.4.2)$$

En vertu du théorème 5.2.11, l'inégalité (5.4.2) est impliquée par l'inégalité :

$$\frac{1}{\lambda^2}(\lambda\pi - \pi^2) + \frac{1}{2}(H_{ext} - H_{int})^2 \geq \frac{H_{ext}^2}{2}. \quad (5.4.3)$$

On utilise l'expression $\lambda = \frac{2\pi k}{H_{int}}$; cette inégalité se réécrit en :

$$\left(\frac{H_{int}}{2k} - \left(\frac{H_{int}}{2k}\right)^2\right) + \frac{1}{2}(H_{int}^2 - 2H_{int}H_{ext}) \geq 0. \quad (5.4.4)$$

Cette dernière est elle même équivalente à :

$$H_{int}\left[\frac{1}{2k} - H_{ext}\right] + H_{int}^2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4k^2}\right] \geq 0. \quad (5.4.5)$$

Cette inégalité est vérifiée si $H_{ext} \leq \frac{1}{2k}$ puisque on a toujours $\frac{1}{2} - \frac{1}{4k^2} \geq 0$; on a donc l'inclusion $]0, \frac{1}{2k}] \subset F_k$.

3^{eme} étape :

Si $H_{ext} > \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors l'énergie de l'état normal est strictement inférieure à l'énergie de l'état supraconducteur pur ; en effet :

$$E_N = \frac{1}{4} < \frac{H_{ext}^2}{2} = E_S. \quad (5.4.6)$$

Cela signifie qu'aucun point de l'intervalle $] \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty[$ n'appartient à F_k . Par conséquent $F_k \subset]0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

4^{eme} étape :

On sait par le théorème 5.1.1 que, si $H_{ext} \in F_k$ alors pour tout $H'_{ext} \leq H_{ext}$, on a $H'_{ext} \in F_k$. Par conséquent, l'ensemble F_k est un intervalle qui peut être de la forme $]0, H_{c1}(k)[$ ou $]0, H_{c1}(k)]$ avec $\frac{1}{\sqrt{2}} \geq H_{c1}(k) > \frac{1}{2k}$.

De par la definition de $H_{c1}(k)$ on a

$$F_k = \cap_{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}} U_{\lambda, k, H_{int}, \phi, \vec{a}}^{-1}([0, \infty]) \quad (5.4.7)$$

avec $U_{\lambda, k, H_{int}, \phi, \vec{a}}(H_{ext}) = \frac{1}{\lambda^2} F_{\lambda, k}(\phi, \vec{a}) + \frac{(H_{int} - H_{ext})^2}{2} - \frac{H_{ext}^2}{2}$.

L'ensemble F_k est un fermé dans \mathbb{R}_+^* comme intersection de fermés donc on a $F_k =]0, H_{c1}(k)]$.

Si $k' \leq k$ alors $F_k \subset F_{k'}$ (cf 5.1.1). On a alors trivialement $H_{c1}(k) \leq H_{c1}(k')$.

CQFD

On a un résultat plus précis :

Proposition 5.4.2 . Si $H_{ext} < H_{c1}(k)$, alors pour tout $H_{int} > 0$, pour tout $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$:

$$\frac{1}{\lambda^2} F_{\lambda, k}(\phi, \vec{a}) + \frac{1}{2} (H_{ext} - H_{int})^2 > \frac{H_{ext}^2}{2}. \quad (5.4.8)$$

Autrement dit l'état supraconducteur pur est l'unique état d'équilibre de la fonctionnelle.

Preuve. On sait par le théorème 5.4.1 que :

Pour tout $H_{int} > 0$, pour tout $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$, on a :

$$\frac{1}{\lambda^2} F_{\lambda, k}(\phi, \vec{a}) + \frac{1}{2} (H_{c1}(k) - H_{int})^2 \geq \frac{H_{c1}(k)^2}{2}. \quad (5.4.9)$$

Cette inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{\lambda^2} F_{\lambda, k}(\phi, \vec{a}) + \frac{1}{2} [-2H_{int}H_{c1}(k) + H_{int}^2] \geq 0. \quad (5.4.10)$$

Si $H_{ext} < H_{c1}(k)$, alors :

$$-H_{int}(H_{ext} - H_{c1}(k)) > 0. \quad (5.4.11)$$

On a donc pour tout $H_{int} > 0$, pour tout $(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}$:

$$\frac{1}{\lambda^2} F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) + \frac{1}{2} [-2H_{int}H_{ext} + H_{int}^2] > 0. \quad (5.4.12)$$

Cette inégalité équivaut à :

$$\frac{1}{\lambda^2} F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) + \frac{1}{2} (H_{ext} - H_{int})^2 > \frac{H_{ext}^2}{2}. \quad (5.4.13)$$

On a donc bien montré que l'état supraconducteur pur est le seul état qui minimise la fonctionnelle $E_{k,H_{ext}}^V(H_{int}, \phi, \vec{a})$. **CQFD**

Théorème 5.4.3 . On a l'expression suivante pour le champ $H_{c1}(k)$:

$$H_{c1}(k) = \inf_{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{1}{4\pi k} \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \sqrt{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2\right] \left[\int_{\Omega} (1 - |\phi|^2)^2\right]} \right\}. \quad (5.4.14)$$

Preuve. Par les définitions (5.3.1), on a :

$$\begin{aligned} H_{ext} \in F_k &\Leftrightarrow \forall H_{int}, \phi, \vec{a}, \frac{F_{\lambda,k}(\phi, \vec{a})}{\lambda^2} + \frac{1}{2} (H_{int} - H_{ext})^2 \geq \frac{H_{ext}^2}{2} \\ &\Leftrightarrow \forall H_{int}, \phi, \vec{a}, D_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) + \frac{1}{2} (H_{int} - H_{ext})^2 \geq \frac{H_{ext}^2}{2} \\ &\Leftrightarrow \forall H_{int}, \phi, \vec{a}, \frac{1}{H_{int}} D_{\lambda,k}(\phi, \vec{a}) + \frac{H_{int}}{2} \geq H_{ext} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall H_{int} > 0, \forall (\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A} \\ \frac{H_{int}}{2} + \frac{1}{4\pi k} \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 \\ + \frac{1}{4H_{int}} \int_{\Omega} (1 - |\phi|^2)^2 + \frac{H_{int}}{2(2\pi)^2} \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2 \geq H_{ext}. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

Or le minimum de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\mapsto \mathbb{R} \\ t &\mapsto at + \frac{b}{t} \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

est égal à $2\sqrt{ab}$ et est atteint pour $t = \sqrt{\frac{b}{a}}$. On obtient donc :

$$H_{ext} \in F_k \Leftrightarrow \begin{cases} H_{ext} \leq \inf_{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{1}{4\pi k} \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \sqrt{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2\right] \left[\int_{\Omega} (1 - |\phi|^2)^2\right]} \right\}. \end{cases} \quad (5.4.17)$$

On a donc l'égalité voulue, car $F_k =]0, H_{c1}(k)]$. **CQFD**

Théorème 5.4.4 . *Le champ $H_{c1}(k)$ vérifie l'estimation asymptotique lorsque $k \rightarrow \infty$*

$$H_{c1}(k) = O\left(\frac{\ln k}{k}\right). \quad (5.4.18)$$

Preuve.

1^{ère} étape :

On sait par la proposition 3.1.6 que les zéros de ϕ_0 sont simples et que l'ensemble de ces zéros est de la forme $z_0 + \mathcal{L}$. On peut donc trouver un domaine fondamental Ω' tel que z_0 soit le seul zéro appartenant à l'intérieur de Ω' et qu'il n'y ait pas d'autres zéros dans $\overline{\Omega'}$.

Soit $\delta > 0$ tel que les boules $B(z_0 + l, \delta)$ soient distinctes dans \mathbb{C} avec $l \in \mathcal{L}$. Soit la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\mapsto \mathbb{R} \\ z &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{|\phi_0|(z)} & \text{si } z \notin \cup_{l \in \mathcal{L}} B(z_0 + l, \frac{\delta}{2}) \\ \frac{2|z-(z_0+l)|}{\delta} \frac{1}{|\phi_0|(z)} & \text{si } z \in B(z_0 + l, \frac{\delta}{2}) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

La fonction $f\phi_0$ est de module 1 en dehors de $\cup_{l \in \mathcal{L}} B(z_0 + l, \frac{\delta}{2})$, est de module $\frac{2|z-(z_0+l)|}{\delta}$ dans la boule $B(z_0 + l, \frac{\delta}{2})$. Elle est également de classe H_{loc}^1 .

La fonction $\frac{\phi_0(z)}{z-z_0}$ ne s'annule pas sur $B(z_0, \delta)$; par conséquent il existe une section θ définie sur $B(z_0, \delta)$ pour l'argument de cette fonction complexe puisque $B(z_0, \delta)$ est simplement connexe. La section θ est C^∞ .

Soit θ_1 la fonction C^∞ définie sur $B(z_0, \delta)$ par

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta \text{ dans } B(z_0, \frac{\delta}{2}) \\ \theta_1 &= 0 \text{ dans } B(z_0, \delta) - B(z_0, \frac{3\delta}{4}) \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Une telle fonction existe. On la prolonge à \mathbb{C} en imposant que θ_1 est \mathcal{L} -périodique et que la fonction θ_1 s'annule hors de $\cup_{l \in \mathcal{L}} B(z_0 + l, \frac{\delta}{2})$.

La fonction $f(z)\phi_0(z)e^{i\theta_1(z)}$ est donc de module 1 hors de $\cup_{l \in \mathcal{L}} B(z_0 + l, \frac{\delta}{2})$ et est égale à $\frac{2(z-z_0)}{\delta}$ dans $B(z_0, \frac{\delta}{2})$.

On appelle cette fonction ϕ' . Elle est de classe H_{loc}^1 .

Il existe $\delta > 0$ tel que, $B(z_0 + l, \frac{\delta}{2}) \cap \Omega' = \emptyset$ si $l \neq 0$ et $B(z_0, \frac{\delta}{2}) \subset \Omega'$.

C'est cette fonction que l'on va modifier maintenant pour arriver à nos fins.

Soit $\frac{\delta}{2} > \epsilon > 0$. On définit la fonction ϕ_ϵ par

$$\begin{aligned} \phi_\epsilon : \mathbb{C} &\mapsto \mathbb{C} \\ z &\mapsto \begin{cases} \phi' & \text{si } z \notin \cup_{l \in \mathcal{L}} B(z_0 + l, \frac{\delta}{2}) \\ \frac{z-z_0}{\epsilon} & \text{si } z \in B(z_0, \epsilon) \\ \frac{z-z_0}{|z-z_0|} & \text{si } z \in B(z_0, \frac{\delta}{2}) - B(z_0, \epsilon). \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

cette fonction est continue et peut être considérée comme une section du fibré E_1 , toute la question est d'estimer les quantités $\int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi_{\epsilon} + (\vec{A}_0 + \vec{a}')\phi_{\epsilon}\|^2$ et $\int_{\Omega} (1 - |\phi_{\epsilon}|^2)^2$.

2^{eme} étape :

La fonction ϕ_{ϵ} est de module inférieur à 1. On calcule sa norme H^1 .

$$\nabla \frac{z}{|z|} = \left(\frac{y^2 - ixy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{ix^2 - xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (5.4.22)$$

On obtient aussi :

$$\begin{aligned} \int_{B(z_0, \frac{\delta}{2}) - B(z_0, \epsilon)} \|\nabla \phi_{\epsilon}\|^2 &= \int_{B(z_0, \frac{\delta}{2}) - B(z_0, \epsilon)} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_{\epsilon}^{\frac{\delta}{2}} \frac{1}{r^2} 2\pi r dr \\ &= \int_{\epsilon}^{\frac{\delta}{2}} \frac{1}{r} 2\pi dr \\ &= 2\pi [\ln \frac{\delta}{2} - \ln \epsilon] \\ &= O(-\ln \epsilon). \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

L'expression $\int_{\Omega' - B(z_0, \frac{\delta}{2})} \|\nabla \phi_{\epsilon}\|^2$ ne dépend pas de ϵ et

$$\begin{aligned} \int_{B(z_0, \epsilon)} \|\nabla \phi_{\epsilon}\|^2 &= \int_{B(z_0, \epsilon)} \frac{2}{\epsilon^2} dx dy \\ &= \frac{2}{\epsilon^2} \pi \epsilon^2 \\ &= 2\pi \\ &= O(1). \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

On a donc l'estimée :

$$\int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi_{\epsilon} + \vec{A}_0\phi_{\epsilon}\|^2 = O(-\ln \epsilon). \quad (5.4.25)$$

Enfin, vu la définition de ϕ_{ϵ} , on obtient :

$$\int_{\Omega'} (1 - |\phi_{\epsilon}|^2)^2 \leq \int_{B(z_0, \epsilon)} dx dy = \pi \epsilon^2 = O(\epsilon^2). \quad (5.4.26)$$

On introduit le couple $(\phi_{\epsilon}, 0)$ dans l'expression à l'intérieur de l'infimum de l'expression (5.4.14). On obtient la valeur :

$$\frac{O(-\ln \epsilon)}{k} + O(\epsilon). \quad (5.4.27)$$

Si on prend $\epsilon = \frac{1}{k}$, on obtient l'estimée :

$$\frac{O(\ln k)}{k} + \frac{O(1)}{k}. \quad (5.4.28)$$

On a donc trouvé une valeur pour l'expression entre accolade de l'infimum. Comme le champ $H_{c1}(k)$ est l'infimum sur les couples possibles, on en déduit l'estimée annoncée. **CQFD**

Remarque 5.4.5 . *La thèse de Sylvia Serfaty contient des estimées de ce type pour le cas de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau sur un domaine du plan.*

A priori notre cadre (minimisation sur des fonctions périodiques) est plus simple et ces résultats doivent également être vrais.

Dans [Se] elle montre l'existence de solution minimisant localement la fonctionnelle. Il est montré dans [SeSa] que cette solution minimisante est en fait un minimum global

Proposition 5.4.6 . *La fonction $k \mapsto kH_{c1}(k)$ est croissante. La fonction $H_{c1}(k)$ est continue.*

Preuve. On sait que le champ $H_{c1}(k)$ a pour expression

$$H_{c1}(k) = \inf_{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{1}{4\pi k} \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + \sqrt{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2\right] \left[\int_{\Omega} (1 - |\phi|^2)^2\right]} \right\}. \quad (5.4.29)$$

La fonction $k \mapsto \frac{1}{k}$ est décroissante donc la fonction $k \mapsto H_{c1}(k)$ est décroissante. On a aussi

$$kH_{c1}(k) = \inf_{(\phi, \vec{a}) \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \|i\vec{\nabla}\phi + (\vec{A}_0 + \vec{a})\phi\|^2 + k \sqrt{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_{\Omega} |\text{rot } \vec{a}|^2\right] \left[\int_{\Omega} (1 - |\phi|^2)^2\right]} \right\}. \quad (5.4.30)$$

La croissance de $k \mapsto kH_{c1}(k)$ est également claire.

Si $0 < k \leq k'$ on a $H_{c1}(k') \in [\frac{k}{k'}H_{c1}(k), H_{c1}(k)]$ donc

$$\lim_{k' \rightarrow k, k' \geq k} H_{c1}(k') = H_{c1}(k) \quad (5.4.31)$$

de même si $0 < k' \leq k$ on a $H_{c1}(k') \in [H_{c1}(k), \frac{k}{k'}H_{c1}(k)]$ donc on a aussi une limite à gauche. La fonction $k \mapsto H_{c1}(k)$ est continue. **CQFD**

5.5 Conclusion et références

La première étude sur l'état d'Abrikosov a été faite par Abrikosov dans l'article [Ab]. Elle montrait à partir des équations de Ginzburg-Landau qu'il

existe un état intermédiaire entre la supraconductivité pure et l'état normal. Cette étude a été reprise par Lasher [La] et Odeh [Od2] qui décrivent la transition de phase vers l'état mixte.

Dans les années 90, Bethuel, Hélein et Brézis ont analysé la limite $k \rightarrow \infty$, sans champ magnétique dans [BBH], puis avec champ magnétique dans [BR].

L'article [DGP] est une étude de l'existence de solutions du problème variationnel sur le tore.

L'étude de la bifurcation d'Abrikosov est faite dans [BGT]. Les articles [Al1] et [Chap] étudient l'énergie des états bifurqués et leur stabilité. L'article [Tak] se consacre aux zéros des états bifurqués. L'article [EMQ] montre que l'on ne peut pas avoir de lignes de zéros dans le cas d'un ouvert simplement connexe.

Le cas $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a été étudié dans [Al2] où une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solution à N vortex est donnée. Les références [CY], [Ga], [Tau], [WY] sont consacrés entre autre à l'existence et l'unicité de couples minimisants.

L'analyse asymptotique quand k tend vers l'infini du champ critique H_{c1} est faite dans [Se] et [SeSa] en dimension 2. La dimension 1 est traitée dans [BH1] et [BH2].

Les références [Ad], [Ho], [Tay] et [Br] sont des références relativement standards sur les espaces de Sobolev, les opérateurs pseudodifférentiels et l'analyse fonctionnelle qui nous ont été utiles dans notre travail.

Bibliographie

- [Ab] A.A. Abrikosov : Magnetic properties of group II Superconductor. (J. Exptl. Theoret. Phys. (USSR)**32**, 1174-1182, Volume 5, 1957).
- [Ad] R. D. Adams : Sobolev Spaces. Birkhäuser, 1975.
- [Al1] Y. Almog : On the bifurcation and stability of periodic solutions of the Ginzburg Landau equations in the plane. Preprint
- [Al2] Y. Almog : Periodic solutions to the first order Ginzburg-Landau equations. Preprint.
- [BGT] E. Barany, M. Golubitsky and J. Turski : Bifurcations with local gauge symmetries in the Ginzburg-Landau equations. Physica-D 56 (1992), p. 36-56 .
- [BBH] F. Bethuel, H. Brézis, F. Hélein : Ginzburg-Landau vortices. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 13. Birkhäuser, .
- [BR] F. Bethuel, T. Rivière : Vortices for a variational problem related to superconductivity. Annales de l'Institut Henri Poincaré (Analyse Non Linéaire), 12 (1995), No. 3, p. 243–303.
- [Bo] E. B. Bogmol'nyi : The stability of classical solutions. Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449 (1977).
- [BH1] C. Bolley, B. Helffer : Asymptotics for critical fields in an approximate Ginzburg-Landau model in the large size limit. Math. Models Methods Appl. Sci. 8 (1998), no. 5, 821–849.
- [BH2] C. Bolley, B. Helffer : The Ginzburg-Landau equations in a semi-infinite superconducting film in the large κ limit. European J. Appl. Math. 8 (1997), no. 4, 347–367.
- [Br] H. R. Brézis : Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Collection Mathématique Appliquée pour la maîtrise. Masson, 1983.
- [CY] L.A. Caffarelli, Y. Yang : Vortex condensation in the Chern-Simons Higgs model : An existence theorem. Communications in Mathematical Physics, 168, 321-336 (1995)

- [Chab] B. Chabat : Introduction à l'analyse complexe, Tome 2 : Fonctions de plusieurs variables. MIR, 1990.
- [Chap] S. J. Chapman : Nucleation of superconductivity in decreasing fields. I, II.
European J of Appl Math. 5 (1994), No. 4, p. 449–468 et p. 469–494.
- [Cr] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz : Bifurcation from simple eigenvalues.
Journal of Functional analysis, 8, 321-340 (1971)
- [De] J. P. Demailly : Sur l'identité de Bochner Kodaira Nakano en géométrie hermitienne. Séminaire d'analyse P. Lelong, P. Dolbeault, H. Skoda année 83/84 p. 88-97, Lecture Notes in maths 1198.
- [Do] P. Dolbeault : Analyse complexe. Masson, Collection maîtrise de mathématique pure, 1990.
- [EMQ] C. Elliot, H. Matamo, T. Qi : Zeros of complex Ginzburg-Landau order parameter with applications to superconductivity.
European J of Appl Math. 5 (1994), No. 4, p. 431–448.
- [Ga] O. Garcia Prada : A direct existence proof for the vortex equations over a compact Riemannian manifold. Bull London Math Soc 26 (1994) 86-96
- [Ge] P. G. de Gennes : Superconducting properties of metals and alloys. Addison Wesley, 1966.
- [GS] M. Golubitsky, D.G. Schaeffer : Singularities and groups in bifurcation theory I,II.
Springer Verlag, 1985-1988.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris : Principles of algebraic Geometry.
Wiley Classics Library Edition Published, 1994.
- [DGP] Q. Du, M. D. Gunzburger, J. S. Peterson : Modeling and analysis of a periodic Ginzburg-Landau model for Type-II superconductors.
SIAM Journal on applied mathematics 53 (1993), No 3, p. 689-717.
- [Ho] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I,II.
Springer Verlag, 1983.
- [JaTa] A. Jaffe, C.H. Taubes : Vortices and Monopoles.
Birkhäuser, 1980.
- [JT] T. Jürgen, A. Thomas : the generalized Lichnerowicz formula and analysis of Dirac operators. J Reine Angew Math 471 (1996) p23-42.
- [Ki] C. Kittel, Physique de l'état solide.
Dunod Collection Université, 1983.
- [La] G. Lasher : Series solutions of the Ginzburg-Landau equations for the Abrikosov mixed state.
Physical review, Volume 140, No 2A, p. 523-528. 1965

- [LM] H.B. Lawson and M.-L. Michelsohn : Spin geometry.
Princeton University press, 1989.
- [Li] A. Lichnerowicz : Spineurs harmonique. CRAS(A) 257 (1963).
- [MaAi] P. Malliavin et H. Airault : Intégration, analyse de Fourier, analyse gaussienne.
Masson, 1994.
- [Na] M. Nakahara : Geometry, topology and physics.
Institute of Physics Publishing, 1990.
- [Od1] F. Odeh : Existence and bifurcation theorems for the Ginzburg-Landau equation.
Journal of Mathematical Physics, Volume 8, No 12, December 1967.
- [Od2] F.Odeh : A bifurcation problem in superconductivity, in Bifurcation Theory and nonlinear eigenvalue problems.
Edited by J.B. Keller, S. Antman, W.A. Benjamin, Inc (1969), p. 99-112.
- [RS] M. Reed, B. Simon : Methods of modern mathematical physics, IV Analysis of operators.
Academic Press, 1978.
- [RV] A. Roberto, D. Varberg : Convex functions, Pure and Applied Mathematics, Vol 57.
Academic Press, New York-London, 1973.
- [SST] D. Saint-James, G. Sarma, E.J. Thomas : Type-II-Superconductivity.
Pergamon Press, 1969.
- [Sa] D. Salamon : Spin geometry and Seiberg-Witten invariants.
(preprint communiqué par Denis Auroux).
- [Se] S. Serfaty : Local minimizers for the Ginzburg-Landau Energy near Critical Magnetic Field, part I.
à paraître dans Communications in Contemporary Mathematics.
- [SeSa] S. Serfaty, E. Sandier : Global minimizers for the Ginzburg-Landau Energy below the First Critical Magnetic Field.
à paraître dans Annales IHP, Analyse non linéaire.
- [Sie] C. L. Siegel : Topics in complex function theory, Volumes I,II,III.
Wiley Classics Library, 1988.
- [Tak] P. Takac : Bifurcation and vortex formation in the Ginzburg-Landau equations. Preprint.
- [Tau] C. H. Taubes : Arbitrary N-Vortex solutions to the first order Ginzburg-Landau equations. Communications in Mathematical Physics 72, 277-292, 1980.
- [Tay] M.E. Taylor : Pseudodifferential operators.
Princeton University Press, 1981.

- [T] M. Tinkham : Introduction to superconductivity, 2nd edition.
McGraw-Hill, 1996.
- [WY] S. Wang, Y. Yang : Abrikosov's vortices in the critical coupling.
SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), no. 5, 1125–1140.